Solved Problems on Sequences in the Training of High School Students for International Mathematical Olympiads

Juan López Linares

June 24, 2019

Problemas Resolvidos sobre Sequências no Treinamento de Estudantes do Ensino Médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática

Dissertação

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Juan López Linares

Universidade de Sao Paulo, Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos (FZEA-USP)

Orientadora

Profa. Dra. Grazielle Feliciani Barbosa

Universidade Federal de São Carlos, Departamento de Matemática (DM-UFSCar)

Agosto, 2019

Resumo

A Olimpíada Internacional de Matemática (IMO, International Mathematical Olympiad) é uma competição para estudantes do Ensino Médio em que o número de participantes cresceu de forma sistemática ao longo do tempo. Os objetivos das IMOs são descobrir, estimular e desafiar a estudantes talentosos em Matemática. A delegação do Brasil fez sua primeira participação em 1979 e apresenta uma melhora de desempenho a longo do tempo. Nesta dissertação são apresentados e discutidos de forma detalhada 26 problemas que foram propostos para alguma das versões das IMO e que de uma forma ou outra usam sequências na sua formulação. O intuito é que estes possam ser usados no treinamento de estudantes que se preparam para olimpíadas internacionais. O material também pode ser usado por professores e estudantes do ensino universitário. Os problemas aparecem organizados em quatro capítulos: Álgebra, Teoria dos Números, Combinatória e Geometria. Porém, tipicamente cada problema usa conhecimentos ligados a mais de uma área da Matemática. Dentro de cada capítulo é dedicada uma seção para cada problema e os mesmos estam ordenados pelo ano em que aconteceu a IMO, do mais recente para o mais antigo. Em várias seções apresentamos primeiro uma introdução aos conhecimentos chaves para a resolução do problema.

Palavras Chaves: Olimpíada Internacional de Matemática, Sequências, Ensino Médio, Ensino Universitário, Álgebra, Teoria dos Números, Combinatória, Geometria, Problemas Resolvidos

Citar como: López, J . Problemas Resolvidos sobre Sequências no Treinamento de Estudantes do Ensino Médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática. Tese (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, PROFMAT) – Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos. São Paulo, p. 113. 2019.

Title

Solved Problems on Sequences in the Training of High School Students for International Mathematical Olympiads

Abstract

The International Mathematical Olympiad (IMO) is a competition for high school students in which the number of participants has grown steadily over time. The goals of IMOs are to discover, stimulate and challenge talented students in Mathematics. The Brazilian delegation made its first appearance in 1979 and has improved performance over time. In this dissertation 26 problems that have been proposed for some of the IMO versions and which, in one way or another use sequences in their formulation, are presented and discussed in detail. The intention is that these can be used to train students preparing for international olympics. The material can also be used by university teachers and students. The problems appear organized in four chapters: Algebra, Number Theory, Combinatorics and Geometry. However, typically each problem uses knowledge linked to more than one area of mathematics. Within each chapter a section is dedicated to each problem and they are ordered by the year in which the IMO took place, from the most recent to the oldest. In several sections we first present an introduction to the key knowledge for solving the problem.

Keywords: International Mathematical Olympiad, Sequences, High School Education, University Teaching, Algebra, Number Theory, Combinatorics, Geometry, Problems Solved

Cite as: López, J. Problemas Resolvidos sobre Sequências no Treinamento de Estudantes do Ensino Médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática. Tese (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, PROFMAT) – Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos. São Paulo, p. 113. 2019.

Agradecimentos

Agradeço aos professores criadores da iniciativa do PROFMAT por fomentar e fortalecer a formação de professores de Matemática. Em especial, agradeço aos professores do PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos (DM-UFSCar) pelas boas aulas e dedicação ao curso.

Agradeço a minha orientadora, Profa. Dra. Grazielle Feliciani Barbosa, do DM-UFSCar, pela revisão detalhada e váliosos comentário críticos.

Agradeço ao Prof. Alexys Bruno Alfonso, da UNESP Faculdade de Ciências de Bauru, Departamento de Matemática, pelas discussões relativas a vários problemas e a ajuda no uso do LATEX.

Agradeço ao Prof. Jorge Lizardo Diaz Calle, da FZEA-USP, pela ajuda no uso do LATEX.

Agradeço ao Departamento de Ciências Básicas da FZEA-USP por ter me liberado para cursar o PROFMAT.

Agradeço a minha família pelo incentivo e compreensão.

Para minha família em Cuba, em especial, minha mãe Nancy e meu irmão Orestes.

Para minha família no exílio, em especial, meu filho Juan Paolo.

Para minha família no Brasil, em especial, meu filho Giovanni e minha esposa Neide.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.0.1 Breve Descrição da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO)

A Olimpíada Internacional de Matemática (IMO, International Mathematical Olympiad) é uma competição para estudantes do Ensino Médio que é realizada anualmente desde 1959. O único ano em que não ocorreu foi em 1980, devido a conflitos na Mongólia, país que seria a sede [1]. Atualmente é a competição de Matemática pré-universitária mais prestigiada [2].

Na primeira IMO em 1959 somente sete países do bloco socialista participaram, mas hoje em dia mais de 100 países de todo o mundo são representados. A figura 1.1 mostra a evolução do número de países participantes e dos competidores masculinos e femininos.

O número de competidores cresceu de forma sistemática ao longo do tempo. Porém, a participação masculina é notadamente maior que a feminina. Esse padrão em que meninos participam mais que meninas é observado também nas competições de Matemática dentro do Brasil e tem sido associado a fatores sócio-culturais [3].

Para um país participar pela primeira vez de uma IMO a sociedade de Matemática ou o Ministro da Educação devem fazer uma solicitação formar e enviar observadores ao primeiro certame após o pedido [4].

O Regulamento das IMOs está disponível em [5]. Além disso, cada ano é editado um Regulamento Adicional. O enlace para o Regulamento Adicional de 2019 se encontra em [6].

Os objetivos das IMOs são descobrir, estimular e desafiar a estudantes talentosos em Matemática. Fortalecer relações de amizade internacional entre matemáticos de todos os países, criar oportunidades para o intercâmbio de informação sobre programas e conteúdos de estudo e promover a Matemática em general.

A delegação de um país é formada por 6 competidores com menos de 20 anos e que não tenham feito curso

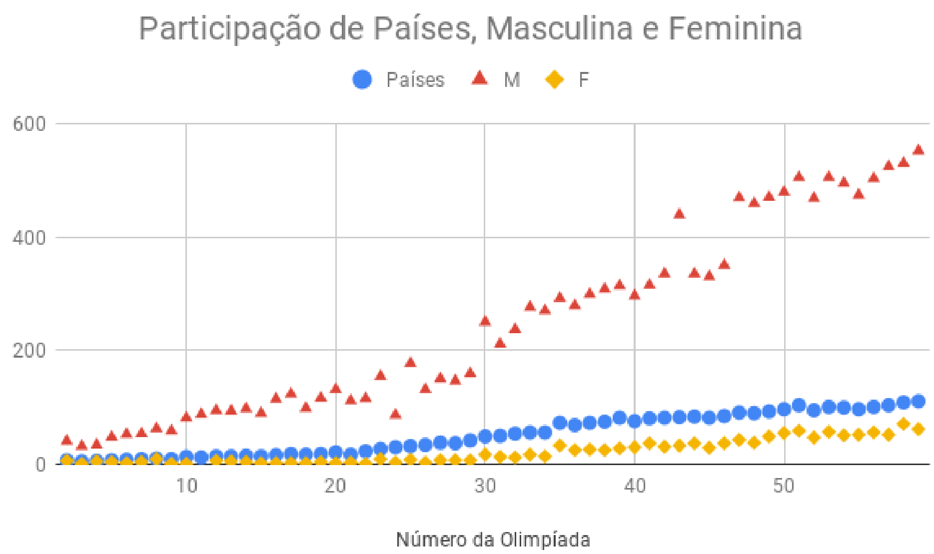

Figura 1.1: Evolução do número de países participantes e dos competidores masculinos (M) e femininos (F) na Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). Dados tirados de http://www.imo-official.org/organizers.aspx

universitário, um professor Líder e um professor Vice-Líder. O professor Vice-Líder cuida dos estudantes e substitui o Líder caso seja necessário.

Cada delegação (menos o país sede) pode enviar problemas para formar a base de dados inicial (LongList, LL). Somente o professor Líder pode enviar propostas seguindo um procedimento seguro. Os mesmos não podem ter sido usados em competições anteriores, nem publicados e devem abranger vários tópicos de matemática pré-universitária. Nos últimos anos os problemas aparecem classificados em quatro área: Geometria, Teoria dos Números, Álgebra e Combinatória.

O país sede da competição cria um Comitê de Seleção que escolhe os melhores problemas da LL para formar uma lista menor (ShortList, SL). Cada Líder recebe a SL no primeiro dia da reunião de Líderes. A SL de cada ano deve ser mantida confidencial até a conclusão da IMO do próximo.

A competição acontece em dois dias consecutivos, três problemas cada dia com quatro horas e meia de duração. Cada problema vale 7 pontos e o grau de dificuldade segue a ordem crescente $P1 < P4 < P2 < P5 < P3 < P6$. Como os líderes conhecem os problemas da prova com antecedência, eles são mantidos separados dos competidores até o término do segundo dia de provas.

As provas são individuais. Durante a competição não é permitido o uso de calculadoras, mas sim de régua e compasso.

Um pouco menos da metade dos participantes recebe alguma medalha seguindo a proporção 1 : 2 : 3 entre Ouro, Prata e Bronze. Prêmios especiais podem ser dados para soluções sobressalentes ou brilhantes. Os participantes que não ganharam medalhas, mas que obtiveram o máximo de 7 pontos em pelo menos um problema recebem Menções Honrosas.

O Juri é formado pelos professores líderes de delegações, cada um com um voto e as decisões são tomadas por maioria simples. Cabe ao Juri a escolha dos problemas da SL que serão usados na IMO, solução de conflitos, a revisão das provas e escolha dos prêmios.

Além da parte competitiva as IMOs são uma grande festa que permite aos participantes socializar com outros estudantes da sua idade e com interesses comuns. O país sede, nos três dias em que as provas são avaliadas, organiza visitas a lugares de interesse da cidade e outras atividades recreativas, esportivas e culturais.

1.0.1.1 Resultados Cumulativos por Equipes

Os países que ficaram com as notas mais altas por equipe em cada IMO foram a China (19 vezes), a antiga União Soviética (14 vezes) e os Estados Unidos (7 vezes) [2].

Considerando o número total de medalhas e menções honrosas recebidas (peso 1 para todas) os três países mais premiados são Hungria, Romênia e Inglaterra. O Brasil é o primeiro país latino americano, na posição de número 23, seguido de Colômbia na posição 41 e Argentina na posição 43. Cuba, meu país de nascimento, aparece na posição 68 [7].

Os estudantes de Cuba participaram em 144 oportunidades (pela primeira vez em 1971) e ganharam 1 medalha de Ouro, 7 de Prata, 37 de Bronze e 24 Menções Honrosas [8]. Dividindo o número total de medalhas e menções honrosas pelo número de participações podemos calcular um índice de sucesso de aproximadamente 48%.

1.0.1.2 Resultados do Brasil

A delegação do Brasil fez sua primeira participação em 1979 e apresenta uma melhora de desempenho a longo do tempo [9]. Seu melhor resultado por equipes foi a posição de número 15 (de 109 países) obtido em 2016. Até 2018, de 231 participações, os estudantes brasileiros ganharam 10 medalhas de Ouro, 43 de Prata, 77 de Bronze e 33 Menções Honrosas. Isso representa um índice de sucesso de aproximadamente 71%.

A tabela 1.0.1 lista os medalhistas de Ouro do Brasil nas IMOs e os anos em que estas aconteceram.

Destaco ao Prof. Carlos Gustavo T. de A. Moreira, que atualmente trabalha no IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada) e treina a equipe brasileira que participa da IMO [10] e ao Prof. Artur Ávila Cordeiro de Melo [11], que atualmente trabalha na França, e foi o primeiro latino americano a receber a Medalha Fields [12], considerado equivalente ao Prêmio Nobel.

Nome	Anos
Nicolau Corçao Saldanha	1981
Ralph Costa Teixeira	1986,1987
Carlos Gustavo T. de A. Moreira	1990
Artur Ávila Cordeiro de Melo	1995
Nicolau Corçao Saldanha	1981
Gabriel Tabares Bujokas	2005
Henrique Pondé de Oliveira Pinto	2009
Rodrigo Sanches Angelo	2012
Pedro Lucas Lanaro Sponchiado	2018

Tabela 1.0.1: Medalhistas de Ouro do Brasil nas IMOs com seus respectivos anos.

Além da IMO o Brasil participa de um número significativo de outras olimpíadas internacionais de Matemática como a Iberoamericana (OIM), a do Cone Sul, a Iraniana de Geometria (IGO) e a Olimpíada Europea de Matemática para Meninas (EGMO, European Girls' Mathematical Olympiad) [13].

A seleção para representar o Brasil na IMO, e outras olimpíadas, é feita a partir dos estudantes medalhistas na Olimpíada Brasileira de Matemática [14].

1.0.2 Participação do Autor em Projetos de Treinamento Olímpicos

Este trabalho está inspirado em uma frustração de adolescente em Cuba.

Aprendi a tabuada com meu avô e ele mesmo se surpreendia quando calculava, antes que todos, o troco de alguma compra. Naquela época era tudo de cabeça, não tínhamos as calculadoras eletrônicas de hoje. Como estudante do Ensino Fundamental I sempre gostei de Matemática, Lembro que após aprender na escola o procedimento da multiplicação de números de mais de dois dígitos chegue em casa, e na falta de papel, rascunhei orgulhoso uma conta na parede.

Sendo estudante do Ensino Fundamental II participei de várias Olimpíadas de Matemática, mas que fiasco, não conseguia resolver quase nenhum problema. Com as Olimpíadas de Física tive mais sorte e fui escolhido para entrar em um grupo que era treinado, aproximadamente duas horas por semana, para representar a escola nessa disciplina. Esse treino marcou minha vida. Na hora de decidir o que estudar na universidade minha resposta foi imediata: Física.

Foi assim que fiz a graduação e mestrado em Física na Universidade da Havana, um curso de diploma em Física no Centro Internacional de Física Teórica (ICTP) de Trieste, na Itália e doutorado em Física na Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), no Brasil.

Mas os ventos sopraram na direção da Matemática quando entrei como professor de Cálculo na Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo (FZEA-USP), campus da USP em Pirassununga.

Em Setembro de 2014, criei um projeto para aumentar as chances de sucesso em Olimpíadas de Matemática de estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental. Em Agosto de 2015 nosso curso foi reconhecido por pesquisadores do IMPA como um POTI (Pólo Olímpico de Treinamento Intensivo) Presencial Voluntário [16].

O projeto já dura cinco anos. Atualmente temos duas turmas: nível I com estudantes sexto e sétimo ano do Ensino Fundamental e nível II com estudantes do oitavo ano em diante. São dedicadas quatro horas aulas por semana, 15 semanas por semestre, e ministradas as disciplinas de Álgebra, Combinatória, Geometria e Aritmética. No final de cada semestre é organizada uma Olimpíada Regional com a participação dos estudantes do curso e outros.

Alguns dos alunos iniciantes ainda continuam participando do projeto e acumulando bons resultados em Olimpíadas e na escola. Boa parte dos estudantes são de escolas públicas e muitos tiveram excelentes resultados nos exames vestibulares. Ao todo já passaram por alguma das suas aulas mais de 500 estudantes e 8 professores.

Um programa da GloboNews sobre índices de educação no Brasil exibiu uma matéria citando uma das escolas públicas que participa do nosso projeto como referência do que pode ser feito para melhorar o desempenho dos estudantes brasileiros [15].

Também criamos uma playlist de vídeo-aulas [17]. No momento são 299 vídeos, com 58 h de duração, média de 11,6 minutos por vídeo.

Queria poder terminar dizendo que os problemas que encontrarão a seguir mataram minha frustração de adolescente por não conseguir resolver problemas de Olimpíadas de Matemática, mas na verdade, teve muitos outros que não consegui resolver.

1.0.3 Organização

Os problemas aparecem organizados em quatro capítulos. Porém, tipicamente cada problema usa conhecimentos ligados a mais de uma área da Matemática. Dentro de cada capítulo é dedicada uma seção para cada problema e os mesmos estam ordenados pelo ano em que aconteceu a IMO, do mais recente para o mais antigo. Em várias seções apresentamos primeiro uma introdução aos conhecimentos chaves para a resolução do problema.

1.0.4 Sequências

Uma sequência é uma função cujo domínio é um subconjunto dos números inteiros e cuja imagem é um subconjunto dos números reais. Neste texto, não estudamos sequências em que a imagem é subconjunto dos números complexos. Isto é, $a : D \subset \mathbb{Z} \to \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$. Com mais frequência o subconjunto D é conjunto dos números naturais ou dos inteiros não negativos. Em lugar de denotar a função como $a(n)$ escrevemos a_n ou (a_n). Uma sequência pode ser finita ou infinita dependendo do número de elementos no conjunto D.

Uma sequência é dita crescente se existir $N \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $n \geq N$ valer que $a_{n+1} \geq a_n$ e a sequência é dita estritamente crescente quando existir $N \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $n \geq N$ vale que $a_{n+1} > a_n$. De forma análoga são definidas as sequência decrescente e estritamente decrescente. Uma sequência é dita decrescente se existir $N \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $n \geq N$ valer que $a_{n+1} \leq a_n$ e a sequência é dita estritamente decrescente quando existir $N \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $n \geq N$ vale que $a_{n+1} < a_n$.

Uma sequência é dita limitada superiormente se existirem $M \in \mathbb{R}$ e $N \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $n \geq N$ valer que $a_n \leq M$ e a sequência é dita limitada inferiormente se existirem $m \in \mathbb{R}$ e $N \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $n \geq N$ valer que $a_n \geq m$. Uma sequência limitada superiormente e inferiormente é dita limitada.

Veremos nos problemas a seguir que as sequências podem ser definidas de diversas formas e aparecem em todas as áreas da Matemática.

Capítulo 2

Álgebra

2.1 Uso da Desigualdade do Rearranjo. IMO 2018 P2

Antes de resolver o problema 2 da Olimpiada Internacional de Matemática (IMO) de 2018 vamos estudar a Desigualdade do Rearranjo pois será usado posteriormente. Seguimos o enunciado e demonstração apresentado por Antonio Caminha Muniz Neto [18].

Proposição: Sejam $a_1 < \cdots < a_n$, com $n \in \mathbb{N}$, números reais e considere a expressão $S = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$ onde $b_1, \cdots, b_n$ é uma reordenação de $a_1, \cdots, a_n$. Então

$$a_1 a_n + \cdots + a_n a_1 \leq S \leq a_1^2 + \cdots + a_n^2 \tag{2.1.1}$$

Antes da demostração vejamos um exemplo.

Seja $(a)_{i=1}^{3} = (-2, 0, 3)$. Temos (3!) seis permutações possíveis:

$$(-2)(3) + (0)(0) + (3)(-2) = -12$$

$$(-2)(0) + (0)(3) + (3)(-2) = -6$$

$$(-2)(3) + (0)(-2) + (3)(0) = -6$$

$$(-2)(-2) + (0)(3) + (3)(0) = 4$$

$$(-2)(0) + (0)(-2) + (3)(3) = 9$$

$$(-2)(-2) + (0)(0) + (3)(3) = 13$$

Uma ilustração geométrica usando vetores tridimensionais pode ser encontrada em [19].

Demonstração: Vamos primeiro maximizar S. Como só há um número finito ($n!$) de possíveis reordenações $b_1, \cdots, b_n$, há uma delas que torna S máxima. Suponha então que partimos da reordenação $b_1, \cdots, b_n$ que torna S máxima. Queremos mostrar que essa reordenação é exatamente $a_1, \cdots, a_n$. Para isso, basta mostrarmos que deve ser $b_1 < \cdots < b_n$. Por absurdo, suponha o contrário, isto é, que existam índices $i < j$ tais que $b_i > b_j$. Trocando as posições de b_i e b_j (pondo b_j ao lado de a_i e b_i ao lado de a_j) a variação de S será:

$$\triangle S = (a_i b_j + a_j b_i) - (a_i b_i + a_j b_j) = (a_i - a_j)(b_j - b_i) > 0$$

Em outras palavras, S aumenta. Mas isso é um absurdo pois partimos de um valor máximo de S. Logo, $b_1 < \cdots < b_n$ e $b_i = a_i, \forall i$. Com isso o maior valor possível de S é $a_1^2 + \cdots + a_n^2$.

O raciocínio para provar a outra parte da desigualdade (2.1.1) é análogo. Existe uma reordenação $c_1, \cdots, c_n$ que torna S mínima, pois o número de reordenações é finito. Suponha então que partimos dela. Queremos mostrar que essa reordenação é exatamente $a_n, \cdots, a_1$. Para isso, basta mostrarmos que deve ser $c_1 > \cdots > c_n$. Por absurdo, suponha o contrário, isto é, que existam índices $i < j$ tais que $c_i < c_j$. Trocando as posições de c_i e c_j (pondo c_j ao lado de a_i e c_i ao lado de a_j) a variação de S será:

$$\triangle S = (a_i c_j + a_j c_i) - (a_i c_i + a_j c_j) = (a_i - a_j)(c_j - c_i) < 0$$

Em outras palavras, S diminue. Mas isso é um absurdo pois partimos de um valor mínimo de S. Logo, vale que $c_1 > \cdots > c_n$ e $c_i = a_{n+1-i}, \forall i$. Com isso o menor valor possível de S é $a_1 a_n + \cdots + a_n a_1 \square$

2.1.1 IMO 2018 P2

Determine todos os inteiros $n \geq 3$ para os quais existem números reais $a_1, a_2, \cdots, a_{n+2}$ tais que $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ e

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2} \tag{2.1.2}$$

para $i = 1, 2, \cdots, n$.

A IMO 2018 foi realizada na cidade Cluj-Napoca, Romênia. Problema proposto pela delegação da Eslováquia [20].

Solução:

2.1.1.1 Caso $n = 3$

Temos a sequência $(a_1, a_2, a_3, a_1, a_2)$, pois $a_4 = a_1$ e $a_5 = a_2$. Adicionalmente, da equação (2.1.2) seguem três equações, uma para cada valor de $i = 1, 2, 3$:

$$a_1 a_2 + 1 = a_3 \tag{2.1.3}$$

$$a_2 a_3 + 1 = a_1 \tag{2.1.4}$$

$$a_3 a_1 + 1 = a_2 \tag{2.1.5}$$

Estamos interesados em encontrar uma solução.

- Suponha inicialmente que $a_1 = a_2 = a_3 = a$. As três equações anteriores se transformam em

$$a^2 - a + 1 = 0 \tag{2.1.6}$$

que não tem solução real pois o discriminante dessa equação quadrática em a é negativo.

- Como segunda tentativa considere $a_1 = a_2 = a \neq a_3$. Neste caso a equação (2.1.3) se transforma em

$$a_3 = a^2 + 1 \tag{2.1.7}$$

  e as equações (2.1.4) e (2.1.5) em

$$a a_3 + 1 = a \tag{2.1.8}$$

Substituindo a_3 de (2.1.7) em (2.1.8) encontramos que $a^3 = -1$, segue que $a = -1$ e voltando em (2.1.7) encontramos $a_3 = 2$. Isto é, existe solução no caso $n = 3$, a sequência $(a_1, a_2, a_3) = (-1, -1, 2)$. Pode ser mostrado que $(a_1, a_2, a_3) = (2, -1, -1)$ e $(a_1, a_2, a_3) = (-1, 2, -1)$ também são soluções.

2.1.1.2 Caso $n = 4$

Temos a sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_1, a_2)$, pois $a_5 = a_1$ e $a_6 = a_2$. Note ainda que podemos extender a sequência de forma cíclica: $a_7 = a_3$ e $a_8 = a_4$.

Adicionalmente, da equação (2.1.2) seguem quatro equações, uma para cada valor de $i = 1, 2, 3, 4$:

$$a_1 a_2 + 1 = a_3 \tag{2.1.9}$$

$$a_2 a_3 + 1 = a_4 \tag{2.1.10}$$

$$a_3 a_4 + 1 = a_1 \tag{2.1.11}$$

$$a_4 a_1 + 1 = a_2 \tag{2.1.12}$$

Das quatro equações anteriores vamos formar outros dois conjuntos de quatro equações cada. Para o primeiro conjunto multiplique as equações anteriores por a_3, a_4, a_1 e a_2, respetivamente.

$$a_1 a_2 a_3 + a_3 = a_3^2 \tag{2.1.13}$$

$$a_2 a_3 a_4 + a_4 = a_4^2 \tag{2.1.14}$$

$$a_1 a_3 a_4 + a_1 = a_1^2 \tag{2.1.15}$$

$$a_1 a_2 a_4 + a_2 = a_2^2 \tag{2.1.16}$$

Para o segundo conjunto multiplique as equações (2.1.9), (2.1.10), (2.1.11) e (2.1.12) por a_4, a_1, a_2 e a_3, respetivamente.

$$a_1 a_2 a_4 + a_4 = a_3 a_4 \tag{2.1.17}$$

$$a_1 a_2 a_3 + a_1 = a_1 a_4 \tag{2.1.18}$$

$$a_2 a_3 a_4 + a_2 = a_1 a_2 \tag{2.1.19}$$

$$a_1 a_3 a_4 + a_3 = a_2 a_3 \tag{2.1.20}$$

Note que a soma dos lados esquerdos dos dois conjuntos de equações anteriores é identica, logo a somas dos lados direitos dos dois conjuntos deve ser igual:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 + a_4 a_4 = a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_1$$

Como (a_2, a_3, a_4, a_1) é uma permutação de (a_1, a_2, a_3, a_4) pela Desigualdade do Rearranjo (equação (2.1.1)) concluímos que $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a$ e voltando nas equações (2.1.9), (2.1.10), (2.1.11) e (2.1.12) encontramos novamente a equação (2.1.6) que não tem solução real. Isto prova que não existe solução real no caso $n = 4$. Estamos prontos para a solução geral.

2.1.1.3 Solução Geral

Multiplicando a equação (2.1.2) por a_{i+2} teremos:

$$a_i a_{i+1} a_{i+2} + a_{i+2} = a_{i+2}^2 \tag{2.1.21}$$

Somando as n equações anteriores, lembrem que $i = 1, 2, \cdots, n$, teremos:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} a_{i+2} + \sum_{i=1}^{n} a_{i+2} = \sum_{i=1}^{n} a_{i+2}^2 \tag{2.1.22}$$

mas $\sum_{i=1}^{n} a_{i+2} = \sum_{i=1}^{n} a_i$ e $\sum_{i=1}^{n} a_{i+2}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$ logo

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} a_{i+2} + \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \tag{2.1.23}$$

Por outro lado, trocando i por $i+1$ na equação (2.1.2) encontramos:

$$a_{i+1} a_{i+2} + 1 = a_{i+3} \tag{2.1.24}$$

Multiplicando por a_i a equação anterior segue:

$$a_i a_{i+3} = a_i a_{i+1} a_{i+2} + a_i \tag{2.1.25}$$

No próximo passo somamos as n equações anteriores:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+3} = \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} a_{i+2} + \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{2.1.26}$$

Agora podemos verificar que o lado esquerdo da equação (2.1.23) coincide com o lado direito da equação (2.1.26), logo

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+3} = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \tag{2.1.27}$$

Pela Desigualdade do Rearranjo (equação (2.1.1)) a equação (2.1.27) implica que

$$a_{i+3} = a_i, \forall i = 1, 2, \cdots, n \tag{2.1.28}$$

Temos dois casos a considerar.

- n é múltiplo de 3, $n = 3k$ com $k \in \mathbb{N}$

Neste contexto existe uma solução que satisfaz a equação (2.1.28) da forma

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{3k-2}, a_{3k-1}, a_{3k}) = (-1, -1, 2, \cdots, -1, -1, 2)$$

Esta solução repete o padrão encontrado no caso $n = 3$.

- n não é múltiplo de 3, $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$ com $k \in \mathbb{N}$

Neste contexto não existe nenhuma solução. Pois a equação (2.1.28) implica que $a_1 = a_4 = \cdots = a_{3k+1}$, $a_2 = a_5 = \cdots = a_{3k+2}$ e $a_3 = a_6 = \cdots = a_{3k}$. Por outro lado, quando $n = 3k + 1$ temos que as igualdades das hipóteses do problema $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ podem ser escritas como $a_{3k+2} = a_1$, $a_{3(k+1)} = a_2$. Logo, $a_2 = a_1$ e $a_3 = a_2$. Isto é, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$ que já vimos que não leva a nenhuma solução real. Uma situação análoga acontece quando $n = 3k + 2$. Outras soluções, em inglês, deste problema se encontram em [21].

2.2 Desigualdades com Sequências de Inteiros. IMO 2014 P1

Seja $a_0 < a_1 < a_2 \ldots$ uma sequência infinita de inteiros positivos. Prove que existe um único inteiro $n \geq 1$ tal que

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1} \tag{2.2.1}$$

A IMO 2014 foi realizada na Cidade do Cabo, África do Sul. Problema proposto por Gerhard Wöginger, Austria [20].

Solução:

2.2.1 Considerações Iniciais

A fração que aparece na desigualdade inicialmente lembra a média aritmética, mas não é o caso devido ao termo a_0. É uma soma de $n+1$ termos da sequência dividida por n.

Vamos estudar primeiro um exemplo. Seja $a_n = n + 1$ com $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, temos que vale $0 < a_0 < a_1 < a_2 \ldots$. Adicionalmente

$$a_{n+1} - a_n = (n+2) - (n+1) = 1$$

Isto é, a sequência é uma progressão aritmética de inteiros positivos. A soma de $n+1$ termos é

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{(n+1) \cdot (a_0 + a_n)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$$

Segue que podemos escrever a desigualdade (2.2.1) como

$$n + 1 < \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2n} \leq n + 2 \tag{2.2.2}$$

O lado esquerdo de (2.2.2) vale se $n < 2$ e o lado direito de (2.2.2) se $n \geq 1$. Com isto, $n = 1$ é a única solução da desigualdade.

2.2.2 Solução Geral

Olhando para o lado esquerdo da desigualdade (2.2.1), e como todos os números são inteiros positivos, vamos definir uma nova sequência (d_n)

$$na_n < a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$0 < a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n - na_n = d_n \tag{2.2.3}$$

$$0 < d_n$$

Agora focamos no lado direito da desigualdade (2.2.1)

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq na_{n+1}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} \leq na_{n+1} + a_{n+1} = (n+1)a_{n+1}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} - (n+1)a_{n+1} \leq 0$$

$$d_{n+1} \leq 0$$

Isto é, a desigualdade (2.2.1) é equivalente a desigualdade

$$d_{n+1} \leq 0 < d_n \tag{2.2.4}$$

para a sequência (d_n). Note de (2.2.3) que $d_0 = a_0 > 0$. Temos adicionalmente que

$$d_{n+1} - d_n = (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} - (n+1)a_{n+1}) - (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n - na_n)$$

$$d_{n+1} - d_n = n(a_n - a_{n+1}) < 0 \tag{2.2.5}$$

Como a sequência (a_n) é estritamente crescente temos $a_n - a_{n+1} < 0$ e $d_{n+1} < d_n$. Isto é, a sequência (d_n) é estritamente decrescente.

Segue que, para algum valor de n, a desigualdade (2.2.4) é satisfeita, pois a sequência (d_n) inicia em um inteiro positivo, é estritamente decrescente e somente assume valores inteiros.

2.2.3 Comentários Finais

O fato da sequência inicial ser uma sequência de números inteiros é essencial na demostração. Como contra-exemplo, seja (a_n) uma sequência de números reais dada por

$$a_n = 10 - \frac{1}{2^n}$$

Temos $a_0 = 9$ e usando (2.2.3) $d_0 = a_0 = 9 > 0$. Adicionalmente

$$a_n - a_{n+1} = (\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}) = -\frac{1}{2^{n+1}}$$

logo $a_n < a_{n+1}$ e (a_n) é estritamente crescente. Pela equação (2.2.5) segue que,

$$d_{n+1} - d_n = -\frac{n}{2^{n+1}}$$

Isto é, a sequência (d_n) é estritamente decrescente. Porém, como o número $\frac{n}{2^{n+1}}$ tende a zero rápidamente quando n cresce, pode ser verificado que $d_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Com isso não existe um valor de n que satisfaça a desigualdade (2.2.4).

Outras discussões relacionadas a este problema encontram em [27] e [28].

2.3 Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica. IMO 2012 P2

2.3.1 Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica

A ferramenta principal para resolver o problema desta seção é a desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica.

Proposição: Seja $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ uma lista de números reais positivos com $n \geq 2$, então

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

onde $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ e $\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$. A igualdade acontece quando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Demonstração do Caso $n = 2$: Queremos provar que:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2}$$

Multiplicando os dois lados por 2 e elevando ao quadrado temos:

$$(x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1 \cdot x_2$$

Desenvolvendo o quadrado e simplificando

$$x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 \geq 4x_1 \cdot x_2$$

$$x_1^2 - 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 \geq 0$$

$$(x_1 - x_2)^2 \geq 0$$

Mas o quadrado de um número real é sempre não negativo. A igualdade acontece quando $x_1 = x_2 \square$

A demostração para $n > 2$ pode ser encontrada, por exemplo, em [29] e [30].

2.3.2 IMO 2012 P2

Seja $n \geq 3$ um inteiro e sejam $a_2, a_3, ..., a_n$ números reais positivos tais que $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Prove que

$$(1 + a_2)^2(1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n \tag{2.3.1}$$

A IMO 2012 foi realizada na cidade de Mar del Plata, Argentina [20].

Solução:

Para o primeiro fator na multiplicação da desigualdade (2.3.1) considere a lista $\{1, a_2\}$. Como ambos números são positivos podemos aplicar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica

$$\frac{1+a_2}{2} \geq \sqrt{1 \cdot a_2}$$

Elevando ao quadrado os dois lados da desigualdade anterior temos

$$(1+a_2)^2 \geq 2^2 \cdot a_2 \tag{2.3.2}$$

A igualdade acontece quando $a_2 = 1$.

Para o segundo fator na multiplicação da desigualdade (2.3.1) considere a lista $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, a_3\right\}$. Como os três números são positivos podemos aplicar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+a_3}{3} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)+a_3}{3} \geq \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot a_3} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot a_3}$$

Elevando ao cubo na desigualdade anterior temos

$$(1+a_3)^3 = (2(\frac{1}{2})+a_3)^3 \geq 3^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot a_3 \tag{2.3.3}$$

A igualdade acontece quando $a_3 = \frac{1}{2}$.

Em geral, para o termo k-ésimo $(2 \leq k \leq n)$ do lado esquerdo na desigualdade (2.3.1) considere a lista com $k-1$ números iguais a $\frac{1}{k-1}$ e a_k, isto é,

$$\left\{\underbrace{\frac{1}{k-1}, \frac{1}{k-1}, \cdots, \frac{1}{k-1}}_{(k-1) \quad \textit{números}}, a_k\right\}$$

Como todos os números são positivos podemos aplicar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica

$$\frac{(k-1)\left(\frac{1}{k-1}\right)+a_k}{k} \geq \sqrt[k]{\left(\frac{1}{k-1}\right)^{(k-1)} \cdot a_k}$$

Elevando a potência k-ésima nos dois lados da desigualdade anterior temos

$$(1+a_k)^k \geq k^k \cdot \left(\frac{1}{k-1}\right)^{(k-1)} \cdot a_k \tag{2.3.4}$$

A igualdade acontece quando $a_k = \frac{1}{k-1}$.

Como k varia de 2 até n multiplicando os termos da desigualdade anterior temos

$$\prod_{k=2}^{n}(1+a_k)^k \geq \prod_{k=2}^{n} k^k \cdot \left(\frac{1}{k-1}\right)^{(k-1)} \cdot a_k$$

Note que parte do lado direito da desigualdade anterior é um produto telescôpico onde todos os termos se cancelam, exceto um

$$\prod_{k=2}^{n} k^k \left(\frac{1}{k-1}\right)^{k-1} = 2^2 3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdots (n-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n-2}\right)^{n-2} n^n \left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = n^n$$

logo

$$\prod_{k=2}^{n} (1+a_k)^k \geq n^n \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n$$

Usando a hipótese no enunciado do problema $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$ podemos escrever

$$\prod_{k=2}^{n} (1+a_k)^k \geq n^n$$

Para que aconteça a igualdade devemos ter que $a_k = \frac{1}{k-1}$ $\forall k \in \mathbb{N}, 2 \leq k \leq n$, mas $n \geq 3$ e

$$a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n-1} \neq 1$$

Isto é, a igualdade nunca acontece, provando que a desigualdade é estrita

$$\prod_{k=2}^{n} (1+a_k)^k > n^n$$

Uma outra solução para este problema pode ser encontrada em [31].

2.4 Divisibilidade e Sistema de Equações com Inteiros. IMO 2011 P1

Para qualquer conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de quatro inteiros positivos distintos, a soma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ é denotada por s_A. Seja n_A o número de pares de índices (i, j), com $1 \leq i < j \leq 4$, para os quais $a_i + a_j$ divide s_A. Encontre todos os conjuntos A de quatro inteiros positivos distintos para os quais n_A alcança o seu valor máximo.

A IMO 2011 foi realizada na cidade de Amsterdã, Holanda [20].

Solução:

Primeiramente suponha que os elementos do conjunto A são inteiros. Note que $a_i + a_j$ divide $s_A = a_i + a_j + a_k + a_l$ se, e somente se, $a_i + a_j$ divide $a_k + a_l = s_A - (a_i + a_j)$. Em outras palavras, a soma de dois termos, $a_i + a_j$, do conjunto A divide a soma dos quatro termos do mesmo conjunto se, e somente se, a soma dos termos, $a_i + a_j$, divide a soma dos outros dois termos, $a_k + a_l$.

Segundo, como os quatro inteiros são positivos e distintos podemos assumir, sem perda de generalidade, que

$$0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \tag{2.4.1}$$

Somando a_1, a_2, a_3 e a_4 na desigualdade anterior encontramos respectivamente:

$$a_1 < 2a_1 < a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_1 + a_4 \tag{2.4.2}$$

$$a_2 < a_1 + a_2 < 2a_2 < a_2 + a_3 < a_2 + a_4 \tag{2.4.3}$$

$$a_3 < a_1 + a_3 < a_2 + a_3 < 2a_3 < a_3 + a_4 \tag{2.4.4}$$

$$a_4 < a_1 + a_4 < a_2 + a_4 < a_3 + a_4 < 2a_4 \tag{2.4.5}$$

Juntando parte das desigualdades (2.4.2) e (2.4.5) encontramos

$$a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_1 + a_4 < a_2 + a_4 < a_3 + a_4 \tag{2.4.6}$$

E juntando parte das desigualdades (2.4.2), (2.4.4) e (2.4.3) encontramos

$$a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_2 + a_3 < a_2 + a_4 < a_3 + a_4 \tag{2.4.7}$$

As duas desigualdades anteriores ((2.4.6) e (2.4.7)) ordenam parcialmente as somas de dois elementos do conjunto A. As duas maiores somas são $a_3 + a_4$ e $a_2 + a_4$ nessa ordem e as duas menores somas são $a_1 + a_2$ e $a_1 + a_3$ nessa ordem. Nada pode ser afirmado a priori (maior, menor ou igual) sobre as somas $a_1 + a_4$ e $a_2 + a_3$.

Terceiro, o conjunto de pares de índices (i, j), com $1 \leq i < j \leq 4$, é $\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$. Com isto, os valores possíveis para n_A variam de 0 até 6.

Quarto, fazendo $i = 3$ e $j = 4$ temos que $a_3 + a_4$ não divide $a_1 + a_2$ pois $a_1 + a_2 < a_3 + a_4$ e fazendo $i = 2$ e $j = 4$ temos que $a_2 + a_4$ não divide $a_1 + a_3$ pois $a_1 + a_3 < a_2 + a_4$ logo $a_3 + a_4$ e $a_2 + a_4$ não dividem s_A e $n_A \leq 4$.

Quinto, nos casos em que $a_1 + a_4 < a_2 + a_3$ e $a_1 + a_4 > a_2 + a_3$ temos que $n_A \leq 3$, pois a maior destas somas não divide a menor. A única chance para $n_A = 4$ é que $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$ pois neste caso $a_1 + a_4$ divide $a_2 + a_3$ e $a_2 + a_3$ divide $a_1 + a_4$.

Sexto, suponha então que $n_A = 4$. Isto é, $a_1 + a_2$ divide $a_3 + a_4$, $a_1 + a_3$ divide $a_2 + a_4$ e $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$.

Como $a_1 + a_2$ divide $a_3 + a_4$ deve existir um inteiro positivo m tal que

$$a_3 + a_4 = m(a_1 + a_2)$$

Adicionalmente, como $a_1 + a_3$ divide $a_2 + a_4$ deve existir um inteiro positivo n tal que

$$a_2 + a_4 = n(a_1 + a_3)$$

Segue das desigualdades (2.4.6) e do fato dos elementos do conjunto A serem inteiros positivos distintos que $m > n \geq 2$.

Resumindo, devemos resolver o sistema de equações a seguir:

$$\begin{aligned} a_1 + a_4 &= a_2 + a_3 \\ m(a_1 + a_2) &= a_3 + a_4 \\ n(a_1 + a_3) &= a_2 + a_4 \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Somando a primeira e terceira equação do sistema temos

$$n(a_1 + a_3) = -a_1 + 2a_2 + a_3$$

No caso em que $n \geq 3$ vale que $n(a_1 + a_3) > 3a_3 > 2a_2 + a_3 > -a_1 + 2a_2 + a_3$, uma contradição com a equação anterior, logo $n = 2$ e rescrevemos (2.4.8) como:

$$\begin{aligned} a_1 + a_4 &= a_2 + a_3 \\ m(a_1 + a_2) &= a_3 + a_4 \\ 2(a_1 + a_3) &= a_2 + a_4 \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

e $m > 2$.

No próximo passo eliminamos a_4 somando a primeira e segunda e a primeira e terceira equaçãos anteriores:

$$\begin{aligned}(1+m)a_1 &= (1-m)a_2 + 2a_3 \\ 3a_1 + a_3 &= 2a_2\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

A seguir eliminamos a_3 somando a primeira equação e duas vezes a segunda equação:

$$(7+m)a_1 = (5-m)a_2 \tag{2.4.11}$$

O lado esquerdo da equação anterior é um inteiro positivo, assim como a_2, segue $m < 5$. Como já tinhamos que $m > 2$ e m é inteiro positivo somente restam duas possibilidades: $m = 3$ ou $m = 4$.

- Caso $m = 3$. Voltando em (2.4.11) temos $a_2 = 5a_1$, colocando esse resultado na segunda equação de (2.4.10) se encontra que $a_3 = 7a_1$ e finalmente substituindo as duas equações anteriores na primeira equação de (2.4.9) chegamos a $a_4 = 11a_1$. Chamando $a_1 = d$ concluímos que $A = \{d, 5d, 7d, 11d\}$.
- Caso $m = 4$. Voltando em (2.4.11) temos $a_2 = 11a_1$, colocando esse resultado na segunda equação de (2.4.10) se encontra que $a_3 = 19a_1$ e finalmente substituindo as duas equações anteriores na primeira equação de (2.4.9) chegamos a $a_4 = 29a_1$. Chamando $a_1 = d$ concluímos que $A = \{d, 11d, 19d, 29d\}$.

Em resumo, n_A alcança o seu valor máximo, $n_A = 4$, quando $A = \{d, 5d, 7d, 11d\}$ ou $A = \{d, 11d, 19d, 29d\}$ para $d \in \mathbb{Z}$ e $d \geq 1$. Esta solução é uma versão ampliada de [32].

2.5 Subsequências de uma Progressão Aritmética. IMO 2009 P3

2.5.1 Subsequências de uma Progressão Aritmética (PA)

Antes de apresentar o problema vejamos um exemplo para esclarecer a notação.

- Considere a sequência $(s_n) = (s_1, s_2, s_3, \cdots)$ dada pela fórmula $s_n = 1 + 2n$. Isto é, $(s_n) = (3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \cdots)$. A sequência (s_n) é uma PA de razão $d = 2$ ($d_n = s_{n+1} - s_n = 2 = cte$) e valor inicial 3 ($s_1 = 3$).

- Vamos construir agora uma nova sequência pegando somente alguns termos da sequência anterior, em outra palavras, uma subsequência. Seja $(s_{s_n}) = (s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \cdots) = (s_3, s_5, s_7, \cdots) = (7, 11, 15, \cdots)$. A sequência (s_{s_n}) é uma PA de razão $D = 4$ ($D_n = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = 4 = cte$) e valor inicial 7 ($s_{s_1} = 7$).

- Adicionalmente, seja outra subsequência $(s_{s_n+1}) = (s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \cdots) = (s_4, s_6, s_8, \cdots) = (9, 13, 17, \cdots)$. A sequência (s_{s_n+1}) é uma PA de razão $E = 4$ ($E_n = s_{s_{n+1}+1} - s_{s_n+1} = 4 = cte$) e valor inicial 9 ($s_{s_1+1} = 9$).

- Podemos ainda construir uma terceira subsequência formada pela diferença das duas subsequências anteriores. Seja $(d_{s_n}) = (s_{s_n+1} - s_{s_n}) = (s_{s_1+1} - s_{s_1}, s_{s_2+1} - s_{s_2}, s_{s_3+1} - s_{s_3}, \cdots) = (s_4 - s_3, s_6 - s_5, s_8 - s_7, \cdots) = (2, 2, 2, \cdots)$.

Vimos um exemplo em que a sequência de partida é uma PA, as duas primeiras subsequências definidas também são PAs e a última subsequência é constante. Esse resultado pode ser generalizado na proposição a seguir.

Proposição: Se $(s_n) = (s_1, s_2, s_3, \cdots)$ é uma progressão aritmética dada pela fórmula $s_n = A + (n-1)d$, onde s_n, A (valor inicial) e d (razão) são números reais e n é um número natural, então as subsequências $(s_{s_n}) = (s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, ...)$ e $(s_{s_n+1}) = (s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, ...)$ também são progressões aritméticas.

Demonstração: Podemos encontrar uma fórmula para s_{s_n} trocando n em $s_n = A+(n-1)d$ por $s_n = A+(n-1)d$. Isto é,

$$s_{s_n} = A + (A + (n-1)d - 1)d$$

$$s_{s_n} = A + (A-1)d + (n-1)d^2$$

$$s_{s_n} = B + (n-1)D$$

Logo, a subsequência (s_{s_n}) é uma Progressão Aritmética de valor inicial $B = A + (A-1)d$ e razão $D = d^2$.

Agora vamos encontrar uma fórmula para s_{s_n+1} trocando n em $s_n = A + (n-1)d$ por $s_n + 1 = A + (n-1)d + 1$. Isto é,

$$s_{s_n+1} = A + (A + (n-1)d + 1 - 1)d$$

$$s_{s_n+1} = A\,(d+1) + (n-1)d^2$$

$$s_{s_n+1} = C + (n-1)E$$

Logo, a subsequência (s_{s_n+1}) é uma Progressão Aritmética de valor inicial $C = A\,(d+1)$ e razão $E = d^2\square$

O problema a seguir é um caso particular da recíproca da proposição anterior.

2.5.2 IMO 2009 P3

Seja $s_1, s_2, s_3, ...$ uma sequência estritamente crescente de inteiros positivos tal que as subsequências $s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, ...$ e $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, ...$ são ambas progressões aritméticas. Demonstre que a sequência $s_1, s_2, s_3, ...$ também é uma progressão aritmética.

A IMO 2009 foi realizada na cidade de Bremen, Alemanha [20]. O problema acima foi proposto pela delegação dos Estados Unidos [33].

Solução:

Como $s_1, s_2, s_3, ...$ é uma sequência estritamente crescente de inteiros positivos vale que $0 < s_1 < s_2 < s_3 < ....$ Temos também que $s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, ...$ e $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, ...$ são ambas progressões aritméticas, logo existem inteiros B, C, D e E tais que

$$s_{s_n} = B + (n-1)D \tag{2.5.1}$$

$$s_{s_n+1} = C + (n-1)E \tag{2.5.2}$$

Note que para todo n natural vale que

$$s_{s_n} < s_{s_n+1} \leq s_{s_{n+1}} \tag{2.5.3}$$

pois $s_n < s_{n+1}$ e $s_n + 1 \leq s_{n+1}$. Substituindo (2.5.1) e (2.5.2) em (2.5.3) encontramos

$$B + (n-1)D < C + (n-1)E \leq B + nD \tag{2.5.4}$$

Subtraindo $B + (n-1)D$ na desigualdade anterior chegamos a

$$0 < C - B + (n-1)(E - D) \leq D \tag{2.5.5}$$

A desigualdade (2.5.5) deve valer para todo n natural. No caso em que $E < D$ existirá um valor de n a partir do qual a primeira parte da desigualdade não será verdadeira, no caso $E > D$ existirá um valor de n a partir do qual a segunda parte não será verdadeira. Com isto concluimos que $E = D$, isto é, a razão nas duas subsequências (PA) deve ser a mesma.

Logo, a desigualdade (2.5.5) pode ser reescrita como

$$0 < C - B \leq D \tag{2.5.6}$$

e a igualdade (2.5.2) como

$$s_{s_n+1} = C + (n-1)D \tag{2.5.7}$$

Seja $d_n = s_{n+1} - s_n$. Usando (2.5.7) e (2.5.1) temos que

$$d_{s_n} = s_{s_n+1} - s_{s_n} = C - B \tag{2.5.8}$$

Para demonstrar que a sequência $s_1, s_2, s_3, ...$ é uma progressão aritmética devemos provar que d_n não depende de n. Isto é, $d_n = d$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

A razão das subsequências pode ser escrita como

$$D = s_{s_{n+1}} - s_{s_n}$$

Alternativamente podemos escrever a razão D como uma soma telescópica

$$D = d_{s_n} + d_{s_n+1} + \cdots + d_{s_{n+1}-1}$$

$$D = (s_{s_n+1} - s_{s_n}) + (s_{s_n+2} - s_{s_n+1}) + \cdots + \left(s_{s_{n+1}} - s_{s_{n+1}-1}\right)$$

Como a sequência (s_n) é de inteiros positivos e estritamente crescente teremos que $d_n \geq 1$ é um inteiro e $d_n < D$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto é, a sequência de inteiros positivos (d_n) é limitada inferiormente e superiormente.

Logo existem m e M tais que $m = min\{d_n\}$ e $M = max\{d_n\}$.

Primeiro, considere a soma de m termos da sequência (d_n), todos menores ou iguais a M:

$$d_{s_n} + d_{s_n+1} + \cdots + d_{s_n+m-1} \leq mM \tag{2.5.9}$$

$$(s_{s_n+1} - s_{s_n}) + (s_{s_n+2} - s_{s_n+1}) + \cdots + (s_{s_n+m} - s_{s_n+m-1}) = s_{s_n+m} - s_{s_n} \leq mM$$

Agora escolha n de tal forma que $d_n = m$. Isto é, $m = s_{n+1} - s_n$ para algum n, segue que

$$s_{s_n+m} - s_{s_n} = s_{s_n+s_{n+1}-s_n} - s_{s_n} = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = D \leq mM \tag{2.5.10}$$

A igualdade em $D \leq mM$ vale se, e somente se, todas as parcelas em (2.5.9) são iguais a M.

Segundo, considere a soma de M termos da sequência (d_n), todos maiores ou iguais a m:

$$d_{s_n} + d_{s_n+1} + \cdots + d_{s_n+M-1} \geq mM \tag{2.5.11}$$

$$(s_{s_n+1} - s_{s_n}) + (s_{s_n+2} - s_{s_n+1}) + \cdots + (s_{s_n+M} - s_{s_n+M-1}) = s_{s_n+M} - s_{s_n} \geq mM$$

Agora escolha n de tal forma que $d_n = M$. Isto é, $M = s_{n+1} - s_n$ para algum n, segue que

$$s_{s_n+M} - s_{s_n} = s_{s_n+s_{n+1}-s_n} - s_{s_n} = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = D \geq mM \tag{2.5.12}$$

A igualdade em $D \geq mM$ vale se, e somente se, todas as parcelas em (2.5.11) são iguais a m.

As desigualdades em (2.5.10) e (2.5.12) implicam que $D = mM$ e que

$$Se\ d_n = m,\ então\ d_{s_n} = d_{s_n+1} = \cdots = d_{s_n+m-1} = M$$

$$Se\ d_n = M,\ então\ d_{s_n} = d_{s_n+1} = \cdots = d_{s_n+M-1} = m$$

Resumindo,

$$Se\ d_n = m,\ então\ d_{s_n} = M$$

$$Se\ d_n = M,\ então\ d_{s_n} = m$$

Mas a equação (2.5.8) diz que $d_{s_n} = C - B = cte$ (não depende de n). Isto é, $M = m$, o mínimo e o máximo do conjunto $\{d_n = s_{n+1} - s_n\}$ é o mesmo. Em outras palavras, a sequência (s_n) é uma progressão aritmética, como queriamos provar.

2.6 Máximo e Mínimo numa Subsequência. IMO 2007 P1

Sejam dados os números reais $a_1, a_2, ..., a_n$. Para cada i $(1 \leq i \leq n)$ defina

$$d_i = max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - min\{a_j : i \leq j \leq n\} \tag{2.6.1}$$

e seja

$$d = max\{d_i : 1 \leq i \leq n\} \tag{2.6.2}$$

(a) Prove que, para quaisquer números reais $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$,

$$max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2} \tag{2.6.3}$$

(b) Mostre que existem números reais $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ tais que vale a igualdade em (2.6.3).

A IMO 2007 foi realizada na cidade de Hanoi, Vietnam [20]. O problema acima foi proposto pela delegação da Nova Zelândia [34].

2.6.1 Exemplo

Antes de apresentar a solução geral podemos esclarecer a notação estudando um exemplo.

Sejam $n = 5$ e $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (3, 7, 4, 2, 9)$.Verifique usando (2.6.1) e (2.6.2) que

$$d_1 = max\{a_1\} - min\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = 3 - 2 = 1$$

$$d_2 = max\{a_1, a_2\} - min\{a_2, a_3, a_4, a_5\} = 7 - 2 = 5$$

$$d_3 = max\{a_1, a_2, a_3\} - min\{a_3, a_4, a_5\} = 7 - 2 = 5$$

$$d_4 = max\{a_1, a_2, a_3, a_4\} - min\{a_4, a_5\} = 7 - 2 = 5$$

$$d_5 = max\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} - min\{a_5\} = 9 - 9 = 0$$

$$d = max\{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\} = 5$$

Sejam $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 2, 3, 4, 5)$. Temos que vale a desigualdade no item (a) do problema:

$$max\,\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} = max\,\{2, 5, 1, 2, 4\} = 5 > \frac{5}{2}$$

Sejam $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}, 9)$. Temos que vale a igualdade do item (b) do problema:

$$max\,\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} = max\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0\right\} = \frac{5}{2}$$

2.6.2 Solução Geral

Considere conhecidos os subíndices $1 \leq p \leq q \leq r \leq n$ tais que $d = d_q$ e, olhando para (2.6.1) e (2.6.2), escrevemos

$$a_p = max\,\{a_j : 1 \leq j \leq q\}$$

$$a_r = min\,\{a_j : q \leq j \leq n\}$$

$$d = a_p - a_r$$

Isto é, a sequência $a_1, \cdots, a_p, \cdots, a_q, \cdots, a_r, \cdots, a_n$ é transformada em duas: $a_1, \cdots, a_p, \cdots, a_q$ e $a_q, \cdots, a_r, \cdots, a_n$. O subíndice q representa a posição de um dos máximos da sequência $(d_i)_1^n$. O subíndice p representa a posição de um dos máximos da sequência $(a_j)_1^q$ e o subíndice r representa a posição de um dos mínimos da sequência $(a_j)_q^n$. Os subíndices podem não ser únicos. No exemplo visto o valor de q podia ser tomado como 2, 3 ou 4.

Precisamos estudar o conjunto $D = \{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\}$. Como estamos supondo conhecidos p, q e r podemos focar em somente dois elementos do conjunto anterior: $|x_p - a_p|$ e $|x_r - a_r|$. Note que

$$(a_p - x_p) + (x_r - a_r) = (a_p - a_r) + (x_r - x_p) \geq a_p - a_r = d$$

Para escrever a desigualdade anterior usamos que $x_r - x_p \geq 0$, pois $r \geq p$ e a sequência (x_i) é não decrescente. Logo

$$(a_p - x_p) + (x_r - a_r) \geq d.$$

Segue que ou $(a_p - x_p) \geq \frac{d}{2}$ ou $(x_r - a_r) \geq \frac{d}{2}$ e

$$max\,\{a_p - x_p, x_r - a_r\} \geq \frac{d}{2}.$$

Usando o módulo dos dois elementos vale que

$$max\,\{|\, a_p - x_p \,|, |\, x_r - a_r \,|\} \geq max\,\{a_p - x_p, x_r - a_r\} \geq \frac{d}{2}.$$

O que equivale a

$$max\{| x_p - a_p |, | x_r - a_r |\} \geq \frac{d}{2}.$$

No próximo passo consideramos todos os elementos do conjunto D

$$max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq max\{| x_p - a_p |, | x_r - a_r |\} \geq \frac{d}{2}$$

Com isto concluimos a prova do item (a), isto é,

$$max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}$$

Para resolver o item (b) vamos definir as sequências (M_i) e (m_i) para todo $1 \leq i \leq n$

$$M_i = max\{a_j : 1 \leq j \leq i\}$$

$$m_i = min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

De (2.6.1) verificamos que $d_i = M_i - m_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Adicionalmente, como o elemento a_i aparece nos dois conjuntos anteriores temos que

$$m_i \leq a_i \leq M_i \tag{2.6.4}$$

para todo $1 \leq i \leq n$. Vamos mostrar que a sequência (x_i) definida como

$$x_i = \frac{M_i + m_i}{2} \tag{2.6.5}$$

para todo $1 \leq i \leq n$, satisfaz as condições do item (b) do problema.

Note primeiro que as sequências (M_i) e (m_i) são não decrescentes

$$M_i = max\{a_1, \cdots, a_i\} \leq max\{a_1, \cdots, a_i, a_{i+1}\} = M_{i+1}$$

$$m_i = min\{a_i, a_{i+1}, \cdots, a_n\} \leq mim\{a_{i+1}, \cdots, a_n\} = m_{i+1}$$

com o que se conclue que a sequência (x_i), dada por (2.6.5), também é não decrescente, como requerido pelo problema.

Segundo, multiplicando (2.6.4) por -1 temos

$$-M_i \leq -a_i \leq -m_i$$

Somando x_i na desigualdade anterior

$$x_i - M_i \leq x_i - a_i \leq x_i - m_i$$

Usando (2.6.5) nos extremos da desigualdade encontramos

$$\frac{M_i + m_i}{2} - M_i \leq x_i - a_i \leq \frac{M_i + m_i}{2} - m_i$$

$$\frac{-M_i + m_i}{2} \leq x_i - a_i \leq \frac{M_i - m_i}{2}$$

Lembrando que $d_i = M_i - m_i$ escrevemos

$$\frac{-d_i}{2} \leq x_i - a_i \leq \frac{d_i}{2}$$

Segue que para todo $1 \leq i \leq n$

$$| x_i - a_i | \leq \frac{d_i}{2}$$

Com isto

$$max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \leq max\left\{\frac{d_i}{2} : 1 \leq i \leq n\right\}$$

$$max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \leq \frac{d}{2}$$

Esta última desigualdade, em conjunto com o provado no item (a), mostra que

$$max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} = \frac{d}{2}$$

Um outro método de construção da sequência (x_i) para satisfazer a última igualdade é discutido em [34].

2.7 Função Parte Inteira e Fracionária. SL da IMO 2006 P1

2.7.1 Função Parte Inteira e Fracionária.

A função parte inteira, denotada por $\lfloor x \rfloor$, converte um número real x no maior número inteiro menor ou igual a x, enquanto a função parte fracionária, denotada por $< x >$, converte um número real x em outro número real, $x - \lfloor x \rfloor$, maior ou igual a zero e menor que um.

Isto é, $\lfloor x \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tal que

$$\lfloor x \rfloor = \max \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$$

e $< x >: \mathbb{R} \to [0,1)$ tal que

$$< x > = x - \lfloor x \rfloor$$

A figura (2.1) ilustra as funções parte inteira e parte fracionaria.

Exemplos: $\lfloor -3,3 \rfloor = -4$; $\lfloor -2 \rfloor = -2$; $\lfloor -0,1 \rfloor = -1$; $\lfloor 0,1 \rfloor = 0$; $\lfloor 3,3 \rfloor = 3$; $\lfloor 7 \rfloor = 7$;

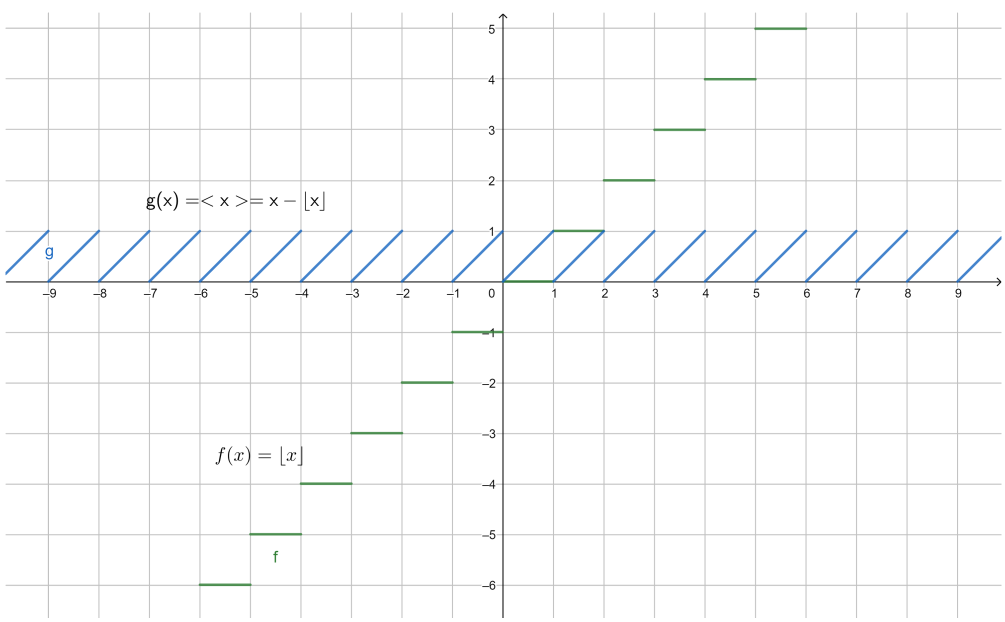

Figura 2.1: A função parte inteira, denotada por $\lfloor x \rfloor$, converte um número real x no maior número inteiro menor ou igual a x, enquanto a função parte fracionária, denotada por $< x >$, converte um número real x em outro número real, $x - \lfloor x \rfloor$, maior ou igual a zero e menor que um.

$< -3,3 > = 0,7$; $< -2 > = 0$; $< -0,1 > = 0,9$; $< 0,1 > = 0,1$; $< 3,3 > = 0,3$; $< 7 > = 0$.

2.7.2 SL da IMO 2006 P1

A sequência de números reais $a_0, a_1, a_2, ...$ está definida pela fórmula

$$a_{i+1} = \lfloor a_i \rfloor \cdot < a_i > \tag{2.7.1}$$

para $i \geq 0$; a_0 é um número real arbitrario, $\lfloor a_i \rfloor$ denota o maior inteiro que não é maior que a_i, e $< a_i >= a_i - \lfloor a_i \rfloor$. Prove que $a_i = a_{i+2}$ para i suficientemente grande.

A IMO 2006 foi realizada na cidade de Ljubljana, Slovenia [20]. O problema acima foi proposto pela delegação da Estonia [35].

Solução:

A sequência em análise foi definida de forma recursiva. Vamos separar seu estudo em três casos.

- No caso em que $0 \leq a_0 \leq 1$ teremos que $a_1 = 0$ e o resto dos termos da sequência serão zeros. Isto é, vale que $a_i = a_{i+2} = 0$ para $i \geq 1$.

- Considere o caso em que $a_0 > 1$, teremos que $a_i \geq 0$ $\forall i \in \mathbb{N}$, pois
  $0 \leq < x > < 1$ e quando $x \geq 0$ vale que $\lfloor x \rfloor \geq 0$.

Adicionalmente, $a_{i+1} < \lfloor a_i \rfloor \leq a_i$, multiplicar um número positivo por outro, maior ou igual a zero e menor que 1, produz um número menor que o de partida. Também usamos a definição da função parte inteira na última desigualdade.

Logo, para todo i temos que $a_{i+1} < a_i$ o que significa que a sequência de termos positivos é estritamente decrescente. Assim, para algum valor de i teremos que $0 \leq a_i \leq 1$ e os próximos termos serão todos zero. Novamente, vale que $a_i = a_{i+2} = 0$ para i suficientemente grande.

- Agora estudaremos o caso mais desafiador, suponha que $a_0 < 0$. Como $0 \leq < x > < 1$ e quando $x < 0$ vale que $\lfloor x \rfloor < 0$ teremos que $a_i \leq 0,\ i \in \mathbb{N}$. Se para algum i acontecer que $a_i = 0$, então o resto dos termos da sequência serão zero, como visto anteriormente. Com isto, considere que $a_i < 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Segue que

$$\lfloor a_i \rfloor \leq -1 \tag{2.7.2}$$

para todo i. Temos ainda que

$$a_{i+1} > \lfloor a_i \rfloor \tag{2.7.3}$$

pois multiplicar um número negativo por outro, maior ou igual a zero e menor que 1, produz um número maior ao de partida. Adicionalmente, da definição da função parte inteira vale que

$$1 + \lfloor x \rfloor > x$$

$$1 + \lfloor a_{i+1} \rfloor > a_{i+1} \tag{2.7.4}$$

De (2.7.3) e (2.7.4) segue

$$1 + \lfloor a_{i+1} \rfloor > \lfloor a_i \rfloor$$

$$\lfloor a_{i+1} \rfloor \geq \lfloor a_i \rfloor$$

Logo, a sequência $(\lfloor a_i \rfloor)$ é não decrescente. Este último fato em conjunto com (2.7.2) indica que deve existir um valor i_0 a partir do qual $\lfloor a_i \rfloor$ é constante, digamos

$$\lfloor a_i \rfloor = c,\ i \geq i_0 \tag{2.7.5}$$

com $c \leq -1$ um inteiro. Voltando em (2.7.1), para $i \geq i_0$ temos

$$a_{i+1} = c \cdot < a_i >$$

$$a_{i+1} = c \cdot (a_i - c) = c \cdot a_i - c^2,\ i \geq i_0 \tag{2.7.6}$$

Encontramos uma equação de recorrência para a sequência (a_i) quando $a_0 < 0$ e $i \geq i_0$. A vantagem de (2.7.6) em comparação com (2.7.1) é que não aparecem mais as funções parte inteira e parte fracionária e é uma recorrência linear (porém, não homogênea). Para resolver (2.7.6) primeiro troque i por $i+1$

$$a_{i+2} = c \cdot a_{i+1} - c^2,\ i \geq i_0 \tag{2.7.7}$$

Subtraindo (2.7.6) de (2.7.7) eliminamos o termo não homogêneo

$$(a_{i+2} - a_{i+1}) = c \cdot (a_{i+1} - a_i),\ i \geq i_0 \tag{2.7.8}$$

Defina a sequência (b_i) como

$$b_i = (a_{i+1} - a_i),\ i \geq i_0 \tag{2.7.9}$$

Segue que (2.7.8) é reescrita como

$$b_{i+1} = c{\cdot}b_i,\ i \geq i_0$$

que é uma progressão geométrica de razão c e valor inicial b_{i_0} cuja solução é

$$b_i = c^{i-i_0} b_{i_0},\ i \geq i_0 \tag{2.7.10}$$

Note agora que (2.7.5) implica que para $i \geq i_0$ vale que $a_i \in [c, c+1)$. Logo, do resultado anterior e de (2.7.9) a sequência (b_i) é limitada. Uma progressão geométrica somente é limitada quando o módulo da sua razão é menor ou igual a 1 ou seu termo inicial é zero. Isto é, temos duas possibilidades: i) $\mid c \mid \leq 1$, como $c \leq -1$ é um inteiro temos $c = -1$ e ii) $b_{i_0} = 0$.

i) Colocando $c = -1$ em (2.7.10) segue

$$b_i = (-1)^{i-i_0} b_{i_0},\ i \geq i_0 \tag{2.7.11}$$

Subtituindo o resultado anterior em (2.7.9) temos

$$a_{i+1} = a_i + (-1)^{i-i_0} b_{i_0},\ i \geq i_0 \tag{2.7.12}$$

Trocando i por $i+1$ na equação anterior

$$a_{i+2} = a_{i+1} - (-1)^{i-i_0} b_{i_0},\ i \geq i_0 \tag{2.7.13}$$

Subtituindo a_{i+1} de (2.7.12) em (2.7.13) chegamos a $a_{i+2} = a_i,\ \forall i \geq i_0$, como queriamos provar.

ii) Colocando $b_{i_0} = 0$ em (2.7.10) encontramos que $b_i = 0,\ i \geq i_0$. Voltando com este resultado em (2.7.9) temos $a_{i+1} = a_i = a_{i_0},\ i \geq i_0$. Logo, a equação (2.7.6) se transforma em

$$a_{i_0} = c{\cdot}a_{i_0} - c^2$$

onde encontramos que

$$a_{i_0} = \frac{c^2}{c-1}$$

Isto é, $a_{i+2} = a_i = a_{i_0} = \frac{c^2}{c-1}$, $\forall i \geq i_0$, como queriamos provar.

Veja exemplos de sequências que obedecem (2.7.1) para diferentes valores iniciais

$$(-3,1; -3,6; -1,6; -0,8; -0,2; -0,8; -0,2; \cdots)$$

$$(5,7; 3,5; 1,5; 0,5; 0; 0; \cdots)$$

2.8 Desigualdade de Bernoulli e Série Harmônica. SL da IMO 2001 P2

2.8.1 Desigualdade de Bernoulli e Série Harmônica

Desigualdade de Bernoulli: Vale que:

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad x > -1 \text{ } e \text{ } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{2.8.1}$$

Demonstração: Este resultado pode ser provado por indução em n. Para $n = 0$ temos

$$1 = (1+x)^0 \geq 1 + 0 \cdot x = 1$$

Por hipótese de indução suponha o resultado válido para algum n

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Como $x > -1$ temos que $1 + x > 0$ e

$$(1+x) \cdot (1+x)^n \geq (1+x) \cdot (1+nx)$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot x + nx^2 \geq 1 + (n+1) \cdot x$$

pois $nx^2 \geq 0$. Segue que (2.8.1) vale para $n + 1$ e pelo princípio de indução finita vale para todo $n\square$

Se conhece por "Série Harmônica" a soma de um número infinito de termos da forma $\frac{1}{n}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

Partindo da sequência infinita

$$\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right)$$

pode ser construida outra sequência infinita chamada "sequência das somas parciais da Série Harmônica"

$$(S_n) = \left(1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \cdots, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \cdots\right)$$

Isto é

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i}\right)$$

Vamos estudar uma subsequência infinita, (S_{2^n}), da sequência (S_n):

$$(S_{2^n}) = (S_1, S_2, S_4, S_8, S_{16}, \cdots, S_{2^n}, \cdots)$$

Note que

$$S_1 = 1 \geq 1 + 0 \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} \geq 1 + 1 \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}$$

O que permite conjeturar que

$$S_{2^n} \geq 1 + n \cdot \frac{1}{2} \tag{2.8.2}$$

Para concluir a prova por indução em n veja que

$$S_{2^{n+1}} = S_{2^n} + \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \geq S_{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$S_{2^{n+1}} \geq S_{2^n} + \frac{2^n}{2^{n+1}} = S_{2^n} + \frac{1}{2}$$

Tomando como hipóteses de indução que (2.8.2) vale para algum n temos que

$$S_{2^{n+1}} \geq 1 + n \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + (n+1) \cdot \frac{1}{2}$$

Isto é, (2.8.2) vale para $n + 1$ e pelo princípio de indução finita vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como a sequência (n) cresce ilimitadamente quando n cresce, a subsequência (S_{2^n}) e a sequência (S_n) também crescem ilimitadamente quando n cresce.

2.8.2 SL da IMO 2001 Problema A2

Seja $a_0, a_1, a_2, ...$ uma sequência infinita e arbitrária de números positivos. Mostre que a desigualdade

$$1 + a_n > a_{n-1} \sqrt[n]{2} \tag{2.8.3}$$

é válida para um número infinito de inteiros positivos n.

A IMO 2001 foi realizada na cidade de Washington, Estados Unidos [20]. O problema acima foi proposto pela delegação da Polônia [38].

Solução:

Usaremos a desigualdade de Bernoulli

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad x \in (-1, +\infty),\ n \in \mathbb{N}$$

para subtituir $\sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}}$. Faça $x = \frac{1}{n}$ na desigualdade anterior

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$$

Segue que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \sqrt[n]{2} \tag{2.8.4}$$

Como $a_n > 0$ para todo n teremos

$$a_{n-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq a_{n-1}\sqrt[n]{2} \tag{2.8.5}$$

Logo, para provar (2.8.3), basta mostrar que

$$1 + a_n > a_{n-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \tag{2.8.6}$$

é válida para um número infinito de inteiros positivos n. Pois nesse caso

$$1 + a_n > a_{n-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq a_{n-1}\sqrt[n]{2}$$

e por transitividade

$$1 + a_n > a_{n-1}\sqrt[n]{2}$$

A demonstração será feita por contradição. Suponha o contrário de (2.8.6). Isto é, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$ vale que

$$1 + a_n \leq a_{n-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \tag{2.8.7}$$

Em outras palavras, o número de termos da sequência (a_n) que satisfaz (2.8.6) é finito.

Dividindo os dois lados de (2.8.7) por $n+1$ teremos

$$\frac{1}{n+1} + \frac{a_n}{n+1} \leq a_{n-1}\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} \tag{2.8.8}$$

Mas

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{1}{n}$$

Segue que

$$\frac{1}{n+1} + \frac{a_n}{n+1} \leq \frac{a_{n-1}}{n} \tag{2.8.9}$$

Somando as desigualdades anteriores quando n muda de N até $m \in \mathbb{N}$, com $m > N$, teremos

$$\sum_{n=N}^{m}\left(\frac{1}{n+1}\right) + \sum_{n=N}^{m}\left(\frac{a_n}{n+1}\right) \leq \sum_{n=N}^{m}\left(\frac{a_{n-1}}{n}\right) \tag{2.8.10}$$

Escrevendo explícitamente os dois últimos somatórios ficará claro que existem muitos termos idênticos que podemos simplificar

$$\sum_{n=N}^{m}\left(\frac{a_n}{n+1}\right)=\left(\frac{a_N}{N+1}+\frac{a_{N+1}}{N+2}+\cdots+\frac{a_{m-1}}{m}+\frac{a_m}{m+1}\right) \tag{2.8.11}$$

$$\sum_{n=N}^{m}\left(\frac{a_{n-1}}{n}\right)=\left(\frac{a_{N-1}}{N}+\frac{a_N}{N+1}+\frac{a_{N+1}}{N+2}+\cdots+\frac{a_{m-1}}{m}\right)$$

Segue que

$$\sum_{n=N}^{m}\left(\frac{1}{n+1}\right)+\frac{a_m}{m+1}\leq\frac{a_{N-1}}{N} \tag{2.8.12}$$

$$\frac{a_m}{m+1}\leq\frac{a_{N-1}}{N}-\sum_{n=N}^{m}\left(\frac{1}{n+1}\right) \tag{2.8.13}$$

O somatório que resta na desigualdade anterior lembra a série harmônica que sabemos que cresce ilimitadamente. Consequentemente, deve existir um valor de m a partir do qual $\frac{a_m}{m+1}<0$. E esta é a contradição, pois $a_m>0$ e $m>0$.

2.9 Recorrência de Segunda Ordem. SL da IMO 1984 P6

Seja c um inteiro positivo. A sequência (f_n) se define como: $f_1 = 1$, $f_2 = c$, e

$$f_{n+1} = 2f_n - f_{n-1} + 2 \quad (n \geq 2) \tag{2.9.1}$$

Mostre que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $f_k f_{k+1} = f_r$.

A IMO 1984 foi realizada na cidade de Praga, antiga Tchecoslováquia, atualmente República Checa [3]. O problema acima foi proposto pela delegação do Canadá [20].

Solução:

A relação de recorrência (2.9.1) pode ser reescrita como

$$f_{n+1} - f_n = f_n - f_{n-1} + 2 \quad (n \geq 2) \tag{2.9.2}$$

Vamos escrever agora a recorrência para diferentes valores de n para por em evidência uma soma telescópica:

$$(f_3 - f_2) = (f_2 - f_1) + 2$$

$$(f_4 - f_3) = (f_3 - f_2) + 2$$

$$(f_5 - f_4) = (f_4 - f_3) + 2$$

$$\vdots$$

$$(f_{n+1} - f_n) = (f_n - f_{n-1}) + 2$$

Somando todas as equações anteriores encontramos

$$f_{n+1} - f_n = f_2 - f_1 + 2 \cdot (n-1) \tag{2.9.3}$$

Escrevendo de forma explícita a equação (2.9.3) para diferentes valores de n fica em evidência outra soma telescópica

$$f_3 - f_2 = (c-1) + 2 \cdot 1$$

$$f_4 - f_3 = (c-1) + 2 \cdot 2$$

$$f_5 - f_4 = (c-1) + 2 \cdot 3$$

$$\vdots$$

$$f_n - f_{n-1} = (c-1) + 2 \cdot (n-2)$$

Somando todas as equações anteriores encontramos

$$f_n - f_2 = (n-2)(c-1) + 2 \cdot (1 + 2 + \cdots + (n-2))$$

$$f_n = c + (n-2)(c-1) + (n-1)(n-2)$$

$$f_n = n^2 + (c-4)n + (4-c)$$

Chamando $b = c - 4$ temos uma fórmula explícita para a sequência (f_n):

$$f_n = n^2 + bn - b \tag{2.9.4}$$

Trocando n por k e $k+1$ em (2.9.4) escrevemos:

$$f_k f_{k+1} = \left(k^2 + bk - b\right)\left((k+1)^2 + b(k+1) - b\right)$$

$$f_k f_{k+1} = k^4 + 2(b+1)k^3 + (b^2 + b + 1)k^2 - (b^2 + b)k - b \tag{2.9.5}$$

Queremos encontrar um valor de r natural tal que $f_k f_{k+1} = f_r$. Como $f_k f_{k+1}$ é um polinômio de grau 4 em k por (2.9.5) e f_r é um polinômio de grau 2 em r por (2.9.4) devemos fazer r um polinômio de grau 2 em k. Seja

$$r = k^2 + pk + q \tag{2.9.6}$$

onde p e q são inteiros a serem determinados. De (2.9.4) e (2.9.6) segue que

$$f_r = f_{k^2+pk+q} = \left(k^2 + pk + q\right)^2 + b\left(k^2 + pk + q\right) - b$$

$$f_r = k^4 + 2pk^3 + \left(p^2 + 2q + b\right)k^2 + p(2q+b)k + \left(q^2 + bq - b\right) \tag{2.9.7}$$

Igualando os coeficientes respectivos de cada potência de k em (2.9.5) e (2.9.7) chegamos a um sistema de equações com variáveis p e q:

$$p = b + 1 \tag{2.9.8}$$

$$p^2 + 2q = b^2 + 1 \tag{2.9.9}$$

$$p(2q + b) = -(b^2 + b) \tag{2.9.10}$$

$$q^2 + bq = 0 \tag{2.9.11}$$

Subtituindo $p = b+1$ de (2.9.8) em (2.9.9) encontramos $q = -b$. O valor de $q = 0$, solução de (2.9.11), não satisfaz o sistema.

Logo, voltando em (2.9.6) o valor de r procurado é

$$r = k^2 + (b+1)k - b \tag{2.9.12}$$

ou usando que $b = c - 4$

$$r = k^2 + (c-3)k - c + 4$$

Temos que r é o resultado da soma e produto de inteiros, logo r será um número inteiro. Como c e k são inteiros e no mínimo 1 teremos que r é no mínimo 2. Segue que r é um número natural. De (2.9.4) a equação (2.9.12) também pode ser escrita como

$$r = f_k + k$$

e a propriedade da sequência reescrita como

$$f_k f_{k+1} = f_{f_k + k}$$

2.10 Desigualdade de Cauchy–Schwarz. IMO 1982 P3.

2.10.1 Desigualdade de Cauchy–Schwarz

Desigualdade de Cauchy–Schwarz: Dadas duas sequências de números reais $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ então

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \tag{2.10.1}$$

e vale a igualdade quando $b_i = \lambda a_i$ para todo $1 \leq i \leq n$ com λ real.

Demonstração: Considere a função real de variável real

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_ix - b_i)^2$$

Desenvolvendo o quadrado e colocando x em evidência podemos escrever

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)x + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Isto é, $f(x)$ é um polinômio de segundo grau em x. Como $f(x)$ é uma soma de quadrados teremos $f(x) \geq 0$ e seu discriminante negativo ou igual a zero.

$$\Delta = 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right) - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0$$

Mas esta é a desigualdade de Cauchy-Schwarz escrita com o símbolo de somatórios:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)$$

A igualdade acontece quando o discriminante é zero, logo $f(x)$ tem uma raiz dupla $x = \lambda$. Isso implica que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_ix - b_i)^2 = 0$$

Como as sequências (a_n) e (b_n) são de números reais, seus quadrados são não negativos. A única possibilidade é que $a_i\lambda - b_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Isto é, acontece a igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz quando as sequências (a_n) e (b_n) são proporcionais$\square$

2.10.2 IMO 1982 P3

Considere a sequência infinita (x_n) de números reais e positivos com as propriedades a seguir: $x_0 = 1$ e para todo $i \geq 0$, $x_{i+1} \leq x_i$.

(a) Prove que para toda sequência desse tipo existe $n \geq 1$ tal que

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3,999 \tag{2.10.2}$$

(b) Encontre uma sequência para a qual

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4 \tag{2.10.3}$$

para todo n.

A IMO 1982 foi realizada na cidade de Budapeste, Hungria [20]. O problema acima foi proposto pela delegação da antiga União Soviética [38].

Solução: (a) Inicialmente usaremos a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Considere as sequências de números reais e positivos

$$(a_n) = \left(\frac{x_0}{\sqrt{x_1}}, \frac{x_1}{\sqrt{x_2}} \cdots, \frac{x_{n-1}}{\sqrt{x_n}}\right)$$

$$(b_n) = (\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \cdots \sqrt{x_n})$$

Pela equação (2.10.1) temos

$$\left(\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n}\right)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \geq (x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1})^2$$

Seja $X_{n-1} = x_1 + \cdots + x_{n-1}$. Como $x_0 = 1$ segue que

$$\left(\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n}\right)(X_{n-1} + x_n) \geq (1 + X_{n-1})^2$$

Adicionalmente, desenvolvendo o quadrado, simplicando e fatorando novamente verifica-se que $(1+X_{n-1})^2 \geq 4X_{n-1}$.

Logo

$$\left(\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\right)\geq\frac{4X_{n-1}}{X_{n-1}+x_n}=\frac{4}{1+\frac{x_n}{X_{n-1}}} \tag{2.10.4}$$

Das hipóteses do problema a sequência (x_n) é não crescente:

$$x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_n$$

Logo,

$$X_{n-1}=x_1+\cdots+x_{n-1}\geq(n-1)x_n$$

Segue que

$$\frac{x_n}{X_{n-1}}\leq\frac{1}{n-1} \tag{2.10.5}$$

Substituindo (2.10.5) em (2.10.4) encontramos

$$\left(\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\right)\geq\frac{4}{1+\frac{x_n}{X_{n-1}}}\geq\frac{4\,(n-1)}{n}$$

Como queremos encontrar um valor de n tal que (2.10.2) seja verdadeiro basta escolher

$$\frac{4(n-1)}{n}\geq 3,999$$

ou $n>4000$.

(b) A sequência $x_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ é uma solução. Note que $x_0=\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$ e (x_n) é decrescente (logo não crescente). De fato, $x_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}<\left(\frac{1}{2}\right)^n=x_n$.

Para mostra que vale (2.10.3) veja que

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}=2+1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

Sendo o lado direito da equação anterior a soma de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ segue que

$$2+1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

Logo, vale para todo n que

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}=4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}<4$$

2.11 Recorrência Não Linear. SL da IMO 1981 P9

A sequência (a_n) está defininida pela relação de recorrência $a_1 = 1$,

$$a_{n+1} = \frac{1 + 4a_n + \sqrt{1 + 24a_n}}{16} \tag{2.11.1}$$

Encontre uma fórmula explicita para a_n.

A IMO 1981 foi realizada na cidade de Washington, Estados Unidos [20]. O problema acima foi proposto pela delegação da antiga Alemanha Ocidental [38].

Solução:

Para eliminar a raiz quadrada suponha que exista uma sequência (b_n) tal que

$$b_n^2 = 1 + 24a_n \tag{2.11.2}$$

Segue que

$$a_n = \frac{b_n^2 - 1}{24} \tag{2.11.3}$$

Subtituindo (2.11.3) em (2.11.1) e simplicando encontramos

$$\frac{2}{3}b_{n+1}^2 = \frac{3}{2} + \frac{b_n^2}{6} + \mid b_n \mid$$

Usando que $b_n^2 = \mid b_n \mid^2$ segue

$$b_{n+1}^2 = \frac{\mid b_n \mid^2}{4} + \frac{3}{2} \mid b_n \mid + \frac{9}{4} = \left(\frac{\mid b_n \mid}{2} + \frac{3}{2} \right)^2$$

Logo

$$\mid b_{n+1} \mid = \mid \frac{\mid b_n \mid}{2} + \frac{3}{2} \mid$$

Como queremos encontrar uma fórmula explicita para a_n, suponhamos que $b_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Teremos

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{3}{2} \tag{2.11.4}$$

uma recorrência linear e não homogênea para (b_n). Quando $a_1 = 1$ usando (2.11.2) encontramos $b_1 = 5$.

Como o coeficiente que acompanha b_n em (2.11.4) não é 1, primeiro procuramos uma solução da equação homogênea correspondente:

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n$$

Como (c_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ uma solução é $c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Segundo, seja $b_n = c_n \cdot d_n$ ou

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot d_n \tag{2.11.5}$$

Como $b_1 = 5$ teremos $d_1 = 5$.

Subtituindo a equação (2.11.5) em (2.11.4) e simplificando encontramos

$$d_{n+1} = d_n + 3 \cdot 2^{n-1} \quad \forall n \geq 1 \tag{2.11.6}$$

Isto é, a sequência (d_n) é linear e não homogênea como a sequência (b_n), porém agora o coeficiente que acompanha d_n é 1.

Reescreva a equação anterior para valores do subíndice variando entre 1 e $n-1$:

$$d_2 = d_1 + 3 \cdot 1$$

$$d_3 = d_2 + 3 \cdot 2$$

$$d_4 = d_3 + 3 \cdot 2^2$$

$$\vdots$$

$$d_n = d_{n-1} + 3 \cdot 2^{n-2}$$

Somando todas as equações anteriores (soma telescópica) encontramos

$$d_n = d_1 + 3\left(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2}\right) \quad \forall n \geq 2$$

A soma entre parênteses na linha anterior é de uma progressão geométrica de razão 2 logo

$$d_n = 5 + 3\left(2^{n-1} - 1\right) \quad \forall n \geq 1 \tag{2.11.7}$$

Subtituindo o resultado anterior em (2.11.5) e simplificando encontramos

$$b_n = 3 + 4 \cdot 2^{-n} \quad \forall n \geq 1 \tag{2.11.8}$$

Subtituindo (2.11.8) em (2.11.3) e simplificando chegamos a

$$a_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{3}{2^n} + \frac{1}{2^{2n-1}}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \quad \forall n \geq 1$$

2.12 Série Harmônica Alternada. IMO 1979 P1.

2.12.1 IMO 1979 Problema 1

Dado que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} = \frac{p}{q}$$

onde p e q são números naturais primos entre si, prove que p é divisível por 1979.

A IMO 1979 foi realizada na cidade de Londres, Reino Unido [20]. O problema acima foi proposto pela delegação da antiga Alemanha Ocidental [38].

Solução:

Seja $S = \frac{p}{q}$ a soma dada:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} \tag{2.12.1}$$

Note que podemos separar os termos com sinal positivo e negativo:

$$S = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{1319}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{1318}\right)$$

Somando e subtraíndo $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{1318}\right)$ encontramos

$$S = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{1318}\right)$$

$$S = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{659}\right)$$

$$S = \left(\frac{1}{660} + \frac{1}{661} + \frac{1}{662} + \cdots + \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}\right)$$

Note que a última soma tem 660 termos que vamos dividir em dois somatórios:

$$S = \sum_{i=660}^{989} \frac{1}{i} + \sum_{i=990}^{1319} \frac{1}{i}$$

Mas $1979 - 660 = 1319$ e $1979 - 989 = 990$. Isto permite escrever o segundo somatorio, em ordem inversa ao primeiro, usando o número 1979.

$$S = \sum_{i=660}^{989} \frac{1}{i} + \sum_{i=660}^{989} \frac{1}{1979 - i}$$

$$S = \sum_{i=660}^{989} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{1979 - i}\right)$$

$$S = \sum_{i=660}^{989} \left(\frac{1979}{i\,(1979 - i)} \right)$$

Como 1979 é um número primo, $660 \leq i \leq 989$ e $990 \leq 1979 - i \leq 1319$ nenhum dos denominadores dentro do somatório divide o numerador. Logo, quando escrito na forma $S = \frac{p}{q}$ os números p e S devem ser divisíveis por 1979.

2.12.2 Generalização

Temos duas possibilidades para reproduzir o resultado do problema anterior: i) O número de parcelas n em S é ímpar e da forma $4t + 3$ com p primo e da forma $6t + 5$ e ii) O número de parcelas n em S é par e da forma $4t$ com p primo e da forma $6t + 1$. Lembre que um número primo quando dividido por 6 somente deixa resto 1 ou 5.

- i) Para $n = 4t + 3$ com $t \geq 0$ inteiro seja

$$S_n = S_{4t+3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{4t+2} + \frac{1}{4t+3} \tag{2.12.2}$$

Separando os termos com o mesmo sinal

$$S_{4t+3} = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{4t+3}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{4t+2}\right)$$

Somando e subtraíndo $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{4t+2}\right)$ segue que

$$S_{4t+3} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{4t+3}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2t+1}\right)$$

$$S_{4t+3} = \left(\frac{1}{2t+2} + \frac{1}{2t+3} + \cdots + \frac{1}{4t+3}\right)$$

Temos $2t + 2$ parcelas que vamos separar em dois somatórios de $t + 1$ parcelas cada

$$S_{4t+3} = \sum_{i=2t+2}^{3t+2} \frac{1}{i} + \sum_{i=3t+3}^{4t+3} \frac{1}{i}$$

Queremos encontrar um primo p tal que

$$\sum_{i=3t+3}^{4t+3} \frac{1}{i} = \sum_{i=2t+2}^{3t+2} \frac{1}{p - i}$$

Logo

$$p - (2t + 2) = 4t + 3$$

$$p - (3t+2) = 3t+3$$

Isto é,

$$p = 6t + 5 \tag{2.12.3}$$

e

$$S_n = S_{4t+3} = \sum_{i=2t+2}^{3t+2} \left[\frac{p}{i\,(p-i)} \right]$$

Em 2027 (próximo ano primo da forma $6t+5$) o problema poderia ser formulado assim: Verifique que a soma

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1350} + \frac{1}{1351} \tag{2.12.4}$$

é divisível por 2027.

Solução:

Como $p = 2027$ temos por (2.12.3) que $t = 337$. Logo (2.12.4) coincide com (2.12.2) pois $1351 = 4 \cdot 337 + 3$.

- ii) Para $n = 4t$ com $t \geq 1$ inteiro seja

$$S_n = S_{4t} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4t-1} - \frac{1}{4t} \tag{2.12.5}$$

Separando os termos com o mesmo sinal

$$S_{4t} = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{4t-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{4t}\right)$$

Somando e subtraíndo $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{4t}\right)$ segue que

$$S_{4t} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{4t}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2t}\right)$$

$$S_{4t} = \left(\frac{1}{2t+1} + \frac{1}{2t+2} + \cdots + \frac{1}{4t}\right)$$

Temos $2t$ parcelas que vamos separar em dois somatórios de t parcelas cada

$$S_{4t} = \sum_{i=2t+1}^{3t} \frac{1}{i} + \sum_{i=3t+1}^{4t} \frac{1}{i}$$

Queremos encontrar um primo p tal que

$$\sum_{i=3t+1}^{4t} \frac{1}{i} = \sum_{i=2t+1}^{3t} \frac{1}{p-i}$$

Logo

$$p - (2t + 1) = 4t$$

$$p - 3t = 3t + 1$$

Isto é,

$$p = 6t + 1 \tag{2.12.6}$$

e

$$S_n = S_{4t} = \sum_{i=2t+1}^{3t} \left[\frac{p}{i\,(p - i)} \right]$$

Em 2029 (próximo ano primo da forma $6t + 1$) o problema poderia ser formulado assim: Verifique que a soma

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1351} - \frac{1}{1352} \tag{2.12.7}$$

é divisível por 2029.

Solução:

Como $p = 2029$ temos por (2.12.6) que $t = 338$. Logo (2.12.7) coincide com (2.12.5) pois $1352 = 4 \cdot 338$.

Um último comentário, pode ser provado usando a Série de Taylor da função logaritmo natural (conteúdo fora da grade do Ensino Médio) que a soma de um número infinito de termos da série harmônica alternada é $ln(2)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{n} \right] = ln\,(2)$$

2.13 Variação da Série Harmônica. SL da IMO 1975 P5

Seja M o conjunto de todos os inteiros positivos que não tem o dígito 9 na base 10. Se $x_1, \cdots, x_n$ é uma sequência de elementos arbitrários e diferentes em M, prove que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} < 80 \tag{2.13.1}$$

A IMO 1975 foi realizada na cidade de Burgas, Bulgaria [20]. O problema acima foi proposto pela delegação da Suécia [38].

Solução:

Na seção "Desigualdade de Bernoulli e Série Harmônica" provamos que a soma

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

onde os j e n são números naturais cresce tanto quanto se queira. Basta tomar um valor de n suficientemente grande.

O problema desta seção propoe um resultado aparentemente contraditório. A chave para resolver o conflito está na primeira frase. Não são todos os números naturais que entram na soma. Temos que excluir aqueles com pelo menos um dígito nove.

Considere um número de k dígitos que pertence ao conjunto M. Quantos deles existem? Temos 8 escolhas para o primeiro dígito da esquerda e 9 escolhas para os outros $k-1$ dígitos. Pelo princípio multiplicativo são $8 \cdot 9^{k-1}$números de k dígitos. Adicionalmente, um número de k dígitos é maior ou igual que 10^{k-1} e menor que 10^k.

Podemos escrever o somatório em (2.13.1) como uma soma dupla:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} = \sum_{i=1}^{k} \left[\sum_{10^{i-1} \le x_j < 10^i} \left(\frac{1}{x_j} \right) \right]$$

Temos que $\frac{1}{x_j} \le \frac{1}{10^{i-1}}$ para todo $10^{i-1} \le x_j < 10^i$ logo

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} < \sum_{i=1}^{k} \left[\sum_{10^{i-1} \le x_j < 10^i} \left(\frac{1}{10^{i-1}} \right) \right]$$

Os x_j que satisfazem $10^{i-1} \le x_j < 10^i$ são números de i dígitos que pertencem a M. O somatório interior da direita na desigualdade anterior pode ser escrito como

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} < \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{8 \cdot 9^{i-1}}{10^{i-1}} \right] = 8 \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{9}{10} \right]^{i-1}$$

Como o último somatório é a soma de uma série geométrica de razão $\frac{9}{10}$ segue que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} < 80 \left(1 - \left(\frac{9}{10} \right)^k \right)$$

Mas $0 < \left(\frac{9}{10}\right)^k < 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, logo

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} < 80$$

Seja $P(k)$ a probabilidade de que um número de k dígitos pertença ao conjunto M. Pelo princípio multiplicativo são $9 \cdot 10^{k-1}$números de k dígitos, dos quais $8 \cdot 9^{k-1}$pertencem a M, logo

$$P(k) = \frac{8}{9} \cdot \left(\frac{9}{10} \right)^{k-1}$$

Note que quando k cresce a probabilidade de um número pertenecer a M decresce e tende a zero quando k tende a infinito.

Capítulo 3

Teoria dos Números (Aritmética)

3.1 Ordem p-ádica nos racionais. IMO 2018 P5

- Seja p um número primo. Vamos definir a ordem p-ádica, $\nu_p(n)$, de um número natural n, como o expoente da maior potência de p que divide n. Alternativamente, podemos escrever que $n = p^\nu c$, com c natural, onde p não divide c. Exemplos:

$$\nu_2(20) = 2 \text{ pois } 2^2 \mid 20 \text{ e } 2^3 \nmid 20 \text{ ou } 20 = 2^2 \cdot 5$$

$$\nu_5(20) = 1 \text{ pois } 5^1 \mid 20 \text{ e } 5^2 \nmid 20 \text{ ou } 20 = 5^1 \cdot 4$$

$$\nu_5(8) = 0 \text{ pois } 5^0 \mid 8 \text{ e } 5^1 \nmid 8 \text{ ou } 8 = 5^0 \cdot 8$$

- Esta definição pode ser extendida para todos os números inteiros não nulos da seguinte forma $\nu_p : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\nu_p(n) = \max\{v \in \mathbb{N} \cup \{0\} : p^v \mid n\}$$

Alternativamente, podemos escrever que $n = p^\nu c$, com c inteiro não nulo, onde p não divide c. Em especial, da definição para números inteiros segue que,

$$\nu_p(n) \geq 0 \tag{3.1.1}$$

Exemplo: $\nu_2(-20) = 2$ pois $2^2 \mid (-20)$ e $2^3 \nmid (-20)$ ou $(-20) = 2^2(-5)$.

- Adicionalmente, vamos extender a definição para os números racionais não nulos. Sejam $a, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e $b, d \in \mathbb{N}$ definimos a ordem p-ádica, $\nu_p(\frac{a}{b})$, como $\nu_p : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ com

$$\nu_p \left(\frac{a}{b}\right) = \nu_p(a) - \nu_p(b) \tag{3.1.2}$$

Alternativamente, podemos escrever que $\frac{a}{b} = p^{\nu} \frac{c}{d}$, com $\frac{c}{d}$ racional não nulo, onde p não divide c e p não divide d. Exemplo: $\nu_2(-20/24) = \nu_2(-20) - \nu_2(24) = 2 - 3 = -1$. Isto é, $\frac{-20}{24} = 2^{-1}(\frac{-5}{3})$.

As próximas duas equações decorrem das propriedades das potências e serão usadas na solução do problema desta seção.

Proposição: Sejam $m, n \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ vale que

$$\nu_p(m \cdot n) = \nu_p(m) + \nu_p(n) \tag{3.1.3}$$

$$\nu_p(m \pm n) \geq min\{\nu_p(m), \nu_p(n)\} \tag{3.1.4}$$

Na última equação se $\nu_p(m) \neq \nu_p(n)$ então acontece a igualdade.

Demonstração: Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e $c, d \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\nu_p(m) = a$ e $\nu_p(n) = b$, temos que $m = p^a c$ e $n = p^b d$, onde $p \nmid c$ e $p \nmid d$.

Para a equação (3.1.3), considere

$$m \cdot n = p^{a+b} cd$$

segue que

$$\nu_p(m \cdot n) = a + b = \nu_p(m) + \nu_p(n)$$

pois $p \nmid cd$.

Para provar (3.1.4) considere primeiro que $\nu_p(m) \neq \nu_p(n)$, o que é o mesmo que $a \neq b$ e suponha, sem perda de generalidade, que $a < b$. Logo

$$m \pm n = p^a \left(c \pm p^{b-a} d\right)$$

como $p \nmid c$ e $p \mid p^{b-a} d$ temos que $p \nmid \left(c \pm p^{b-a} d\right)$. Isto é,

$$\nu_p(m \pm n) = a = min\{a, b\} = min\{\nu_p(m), \nu_p(n)\}$$

Considere agora que $a = b = h$, segue que $\nu_p(m) = h$ e $\nu_p(n) = h$, temos que $m = p^h c$ e $n = p^h d$, onde $p \nmid c$ e $p \nmid d$. Logo

$$m \pm n = p^h \left(c \pm d\right)$$

Temos duas possibilidades: i) $p \nmid (c \pm d)$ logo $\nu_p(m \pm n) = h = min\{\nu_p(m), \nu_p(n)\}$ e ii) $p \mid (c \pm d)$ segue que $\nu_p(m \pm n) > h = min\{\nu_p(m), \nu_p(n)\}$. Em qualquer caso vale (3.1.4) $\square$

Exemplos:

$$2 = 2 - 0 = \nu_7(98) - \nu_7(15) = \nu_7(\tfrac{98}{15}) = \nu_7(\tfrac{7}{5} \cdot \tfrac{14}{3}) = \nu_7(\tfrac{7}{5}) + \nu_7(\tfrac{14}{3}) = 1 + 1 = 2$$

$$\nu_5(15 + 10) = \nu_5(25) = 2 > min\{\nu_5(15), \nu_p(10)\} = min\{1, 1\} = 1$$

$$\nu_5(30 - 5) = \nu_5(25) = 2 > min\{\nu_5(30), \nu_p(5)\} = min\{1, 1\} = 1$$

$$\nu_5(29 - 6) = \nu_5(23) = 0 = min\{\nu_5(29), \nu_p(6)\} = min\{0, 0\} = 0$$

$$\nu_5(25 + 5) = \nu_5(30) = 1 = min\{\nu_5(25), \nu_p(5)\} = min\{2, 1\} = 1$$

Usando o Teorema Fundamental da Aritmética, para todo primo p podemos escrever que a ordem p-ádica do maior divisor comum (mdc) e a ordem p-ádica do menor múltiplo comum (mmc) dos números inteiros m e n é

$$\nu_p(mdc(m, n)) = min\{\nu_p(m), \nu_p(n)\} \tag{3.1.5}$$

$$\nu_p(mmc(m, n)) = max\{\nu_p(m), \nu_p(n)\} \tag{3.1.6}$$

Exemplos: Sejam $m = 14$, $n = 147$ e $p = 2$ e 7 temos $mdc(14, 147) = 7$ e $mmc(14, 147) = 294$ logo

$$0 = \nu_2(7) = \nu_2(mdc(14, 147)) = min\{\nu_2(14), \nu_2(147)\} = min\{1, 0\} = 0$$

$$1 = \nu_2(294) = \nu_2(mmc(14, 147)) = max\{\nu_2(14), \nu_2(147)\} = max\{1, 0\} = 1$$

$$1 = \nu_7(7) = \nu_7(mdc(14, 147)) = min\{\nu_7(14), \nu_7(147)\} = min\{1, 2\} = 1$$

$$2 = \nu_7(294) = \nu_7(mmc(14, 147)) = max\{\nu_7(14), \nu_7(147)\} = max\{1, 2\} = 2$$

3.1.1 IMO 2018 P5

Sejam $a_1, a_2, \cdots$ uma sequência infinita de inteiros positivos. Suponha que existe um inteiro $N > 1$ tal que, para cada $n \geq N$, o número

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

é um inteiro. Prove que existe um inteiro positivo M tal que $a_m = a_{m+1}$ para todo $m \geq M$.

A IMO 2018 foi realizada na cidade Cluj-Napoca, Romênia [20]. Problema proposto pela delegação de Mongolia [25].

Solução:

Note que partindo de uma sequência (a_n) está sendo construida uma segunda sequência (S_n) dada por uma soma:

$$\left(\underbrace{\frac{a_1}{a_1}}_{S_1}, \underbrace{\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}}_{S_2}, \cdots, \underbrace{\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}}_{S_n}, \underbrace{\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1}}_{S_{n+1}}, \cdots\right)$$

A hipotese do problema é que partindo de um certo N, isto é, $\forall n \geq N$, os termos da sequência (S_n) são números inteiros. Como a diferença entre dois números inteiros também é um número inteiro temos $\forall n \geq N$ que

$$S_{n+1} - S_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_1} \in \mathbb{Z} \tag{3.1.7}$$

A ideia da solução do problema será provar que $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ é um número inteiro, pois nesse caso $a_{n+1}|a_n$ e $a_{n+1} \leq a_n$. Isto é, a sequência (a_n) é não crescente, infinita e de inteiros positivos, logo em algum momento deve ser constante. Para provar que $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ é um número inteiro, vamos demostrar antes que $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}$ é um inteiro, pois a equação (3.1.7) garante o resultado.

Como $\frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}-a_n}{a_1} \in \mathbb{Z}$ usando (3.1.1) segue que para todo primo p vale

$$v_p(\frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_1}) \geq 0 \tag{3.1.8}$$

Proposição: Para todo primo p vale $v_p(a_{n+1}) \geq \min\{v_p(a_1), v_p(a_n)\}$

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $v_p(a_{n+1}) < \min\{v_p(a_1), v_p(a_n)\}$. Então, usando as equações (3.1.2) e (3.1.4) teremos

•$v_p(\frac{a_n}{a_{n+1}}) = v_p(a_n) - v_p(a_{n+1}) > 0$

• $v_p(a_{n+1} - a_n) = v_p(a_{n+1})$

• $v_p(\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}) = v_p(a_{n+1} - a_n) - v_p(a_1) = v_p(a_{n+1}) - v_p(a_1) < 0$

•$v_p(\frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}) < 0$, mas isto está em contradição com (3.1.8).

Logo, para todo primo p vale $v_p(a_{n+1}) \geq \min\{v_p(a_1), v_p(a_n)\}\Box$

Como vimos em (3.1.5) $\min\{v_p(a_1), v_p(a_n)\} = v_p(mdc(a_1, a_n))$ para todo p primo. Com isto $v_p(a_{n+1}) \geq v_p(mdc(a_1, a_n))$. Segue que $mdc(a_{n+1}, a_1) \geq mdc(a_n, a_1)$ para $\forall n \geq N$, e a sequência $(mdc(a_n, a_1))$ deve ser não decrescente. Isto é, $mdc(a_N, a_1) \leq mdc(a_{N+1}, a_1) \leq mdc(a_{N+2}, a_1) \leq \cdots$

Por outro lado, como $mdc(a_n, a_1) \leq a_1$ chegamos a

$$mdc(a_N, a_1) \leq mdc(a_{N+1}, a_1) \leq mdc(a_{N+2}, a_1) \leq \cdots \leq a_1$$

Uma sequência infinita de inteiros positivos não decrescente e limitada superiormente. Isto é, deve existir um valor de n, digamos N_1, a partir do qual a sequencia é igual a uma constante C:

$$mdc(a_n, a_1) = C \ \forall n \geq N_1$$

Para o que segue considere um valor de $n \geq N_1$ onde $mdc(a_n, a_1) = mdc(a_{n+1}, a_1)$. Temos duas possibilidades para cada primo p: i) $v_p(a_n) \geq v_p(a_1)$ e $v_p(a_{n+1}) \geq v_p(a_1)$ ou ii) $v_p(a_n) = v_p(a_{n+1}) < v_p(a_1)$.

No primeiro caso, $v_p(a_1) \leq \min\{v_p(a_n), v_p(a_{n+1})\} \leq v_p(a_{n+1} - a_n)$ (Eq.(3.1.4)) logo $v_p(\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}) \geq 0$. Esta última desigualdade em conjunto com (3.1.8)

$$v_p(\frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_1}) \geq \min\{v_p(\frac{a_n}{a_{n+1}}), v_p(\frac{a_{n+1} - a_n}{a_1})\} \geq 0$$

implica que $v_p(\frac{a_n}{a_{n+1}}) \geq 0$. No segundo caso temos que $v_p(\frac{a_n}{a_{n+1}}) = 0$.

Consequentemente, vale nos dois casos que $v_p(\frac{a_n}{a_{n+1}}) \geq 0$ para todo primo p. Segue que $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ é um inteiro, logo $a_{n+1}|a_n$ e $a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \geq N_1$:

$$a_{N_1} \geq a_{N_1+1} \geq a_{N_1+2} \geq \cdots$$

Isto é, (a_n) é uma sequência não crescente. Por outro lado, como (a_n) por hipótes é uma sequência infinita de inteiros positivos

$$a_{N_1} \geq a_{N_1+1} \geq a_{N_1+2} \geq \cdots > 0$$

deve existir um inteiro positivo M tal que $a_m = a_{m+1}$ para todo $m \geq M$. Outras discussões relativas a este problema se encontram em [25].

3.2 Quadrados Perfeitos Mod 3. IMO 2017 P1

Vamos lembrar uma propriedade importante sobre quadrados perfeitos e sua relação com a divisão Euclidiana por 3. Qualquer número $n \in \mathbb{Z}$ é de uma das três formas:

i) $n = 3k$ com $k \in \mathbb{Z}$ ou $n \equiv 0 \mod 3$

ii) $n = 3k + 1$ com $k \in \mathbb{Z}$ ou $n \equiv 1 \mod 3$

iii) $n = 3k + 2$ com $k \in \mathbb{Z}$ ou $n \equiv 2 \mod 3$

Porém, somente existem duas possibilidades na divisão de um quadrado perfeito por 3:

i) $n^2 = (3k)^2 = 3(3k^2) = 3l$ com $l \in \mathbb{Z}$ ou $n^2 \equiv 0 \mod 3$

ii) $n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 = 3l + 1$ com $l \in \mathbb{Z}$ ou $n^2 \equiv 1 \mod 3$

iii) $n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 9k^2 + 12k + 3 + 1 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 = 3l + 1$ com $l \in \mathbb{Z}$ ou $n^2 \equiv 1 \mod 3$

Usaremos este resultado na sua forma recíproca:

a) Se $n^2 \equiv 0 \mod 3$ então $n \equiv 0 \mod 3$

b) Se $n^2 \equiv 1 \mod 3$ então $n \equiv 1 \mod 3$ ou $n \equiv 2 \mod 3$

Isto é, nenhum quadrado perfeito deixa resto 2 na divisão por 3 ($n^2 \not\equiv 2 \mod 3$).

Note ainda que somar 3 não muda uma congruência módulo 3: $n + 3 \equiv n \mod 3$.

3.2.1 IMO 2017 P1

Para cada inteiro $a_0 > 1$, define-se a sequência $a_0, a_1, a_2, ...$ tal que, para cada $n \geq 0$:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{se } \sqrt{a_n} \text{ é inteiro} \\ \\ a_n + 3 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine todos os valores de a_0 para os quais existe um número A tal que $a_n = A$ para infinitos valores de n.

A IMO 2017 foi realizada na Cidade do Rio de Janeiro, Brasil [20]. Problema proposto por Stephan Wagner, África do Sul [26].

Solução:

Vejamos o comportamento dos primeiros termos da sequência para alguns valores de a_0:

$$(2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, \cdots)$$

$$(3, 6, 9, 3, 6, 9, 3, \cdots)$$

$$(4, 2, 5, 8, 11, 14, 17, \cdots)$$

$$(5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, \cdots)$$

$$(6, 9, 3, 6, 9, 3, 6 \cdots)$$

$$(7, 10, 13, 16, 4, 2, 5, 8, \cdots)$$

Quando $a_0 = 2$ e $a_0 = 5$ as sequências parecem ser crescentes o tempo todo, o que significaria que não existe um número A tal que $a_n = A$ para infinitos valores de n. Quando $a_0 = 3$ e $a_0 = 6$ as sequências são periódicas, a configuração 3, 6, 9 repete infinitamente, aqui podemos tomar, por exemplo $A = 3$ para satisfazer as condições do problema. E quando $a_0 = 4$ e $a_0 = 7$ as sequências crescem até um quadrado perfeito, descrescem até 2 para depois crescer o tempo todo, o qual novamente significaria que não existe um número A tal que $a_n = A$ para infinitos valores de n. Esses exemplos sugerem que devemos separar os estudos em três casos, dependendo do resto deixado por a_0 na divisão por 3. Isto é:

i) $a_0 \equiv 0 \mod 3$ ou $a_0 = 3k$ com $k \in \mathbb{N}$

ii) $a_0 \equiv 1 \mod 3$ ou $a_0 = 3k + 1$ com $k \in \mathbb{N}$

iii) $a_0 \equiv 2 \mod 3$ ou $a_0 = 3k + 2$ com $k \in \mathbb{N}$

- O caso iii) é o mais simples de analisar. Dado que nenhum quadrado perfeito deixa resto 2 na divisão por 3, se $a_0 \equiv 2 \mod 3$ então $\sqrt{a_0}$ não é inteiro, $a_1 = a_0 + 3$ e $a_1 \equiv 2 \mod 3$. Em geral, $\forall n \in \mathbb{N}$ teremos, como $a_n \equiv 2 \mod 3$ então $\sqrt{a_n}$ não é inteiro, $a_{n+1} = a_n + 3$ e $a_{n+1} \equiv 2 \mod 3$. Isto é, a sequência é crescente. Logo, não existe um número A tal que $a_n = A$ para infinitos valores de n.

Para os casos i) e ii) vamos estudar a desigualdade

$$b < b + 3 < b^2 < a_0 \leq (b + 3)^2 \tag{3.2.1}$$

Vejamos primeiro a desigualdade $b + 3 < b^2$ ou

$$b^2 - b = b(b - 1) > 3 \tag{3.2.2}$$

A qual é verdadeira

$$\forall b \geq 3, b \in \mathbb{N} \tag{3.2.3}$$

Pela definição, os termos da sequência a_n crescerão de três em três até encontrar um quadrado perfeito. Suponha que o quadrado perfeito mais próximo por cima de a_0 seja $(b+3)^2$ (3.2.1). Isto é, para um certo índice k teremos $a_k = (b+3)^2$ e o termo de ordem $k+1$ será $a_{k+1} = b+3$. Enquanto a desigualdade (3.2.2) for verdadeira os termos da sequência aumentarão até o próximo quadrado perfeito, isto é, para um certo $m \in \mathbb{N}$ teremos $a_{k+1+m} = b^2$, e $a_{k+1+m+1} = b$. Logo, o processo se repete até a desigualdade (3.2.2) não ser mais verdadeira. Com isto o valor mínimo da sequência será menor ou igual a 3.

- Agora focamos no caso i) $a_0 \equiv 0$ mod 3. Suponha que o quadrado perfeito mais próximo por cima de a_0 seja $(3l+3)^2$ com $l \in \mathbb{N}$

$$3l < 3l+3 < (3l)^2 < a_0 \leq (3l+3)^2 \tag{3.2.4}$$

Isto é, para um certo índice k teremos $a_k = (3l+3)^2$ e o termo de ordem $k+1$ será $a_{k+1} = 3l+3$. Trocando b por $3l$ em (3.2.3) encontramos que enquanto $3l \geq 3$ ou $l \geq 1$ for verdadeira os termos da sequência aumentarão até o próximo quadrado perfeito e a seguir descrecerão. Lembre também que se $a_k \equiv 0$ mod 3 então $a_{k+1} = \sqrt{a_k} \equiv 0$ mod 3. Com isto teremos que todos os termos da sequência serão múltiplos de 3 e o menor deles será 3 para $l = 1$. A partir de certo índice a configuração 3, 6, 9 repeterá infinitamente, tomando $A = 3$ serão satisfeitas as condições do problema. Um exemplo é

$$(27, 30, 33, 36, 6, 9, 3, 6, 9, 3, \cdots)$$

- No caso ii) $a_0 \equiv 1$ mod 3. Aqui teremos duas possibilidades:

  - Suponha que o quadrado perfeito mais próximo por cima de a_0 seja, para um certo índice k, da forma $a_k = (3l+2)^2$ e o termo de ordem $k+1$ será $a_{k+1} = 3l+2$ com $l \in \mathbb{N}$. Neste ponto o problema se reduz ao caso iii) visto anteriormente. A sequência crescerá ilimitadamente e não existirá um número A tal que $a_n = A$ para infinitos valores de n. Para este subcaso o valor mínimo da sequência deixa resto 2 na divisão por 3, mas não é 2. Um exemplo é

$$(19, 22, 25, 5, 8, 11, 14, 17, \cdots)$$

– Suponha que o quadrado perfeito mais próximo por cima de a_0 seja, para um certo índice k, da forma $a_k = (3l+1)^2$ e o termo de ordem $k+1$ será $a_{k+1} = 3l+1$ com $l \in \mathbb{N}$. Neste subcaso enquanto $3l+1 > 3$ ou $l > 1$ for verdadeira os termos da sequência aumentarão até o próximo quadrado perfeito e a seguir descrecerão. Se raiz quadrada do próximo quadrado perfeito deixar resto 2 na divisão por 3 estaremos novamente no caso iii), se a raiz quadrada deixar resto 1 na divisão por 3 o ciclo será repetido. Porém, mesmo no caso em que todos os termos da sequência são congruentes a 1 mod 3 quando $l = 1$ para um certo índice h teremos $a_h = 4$ e $a_{h+1} = 2$. A partir deste ponto estamos novamente no caso iii). A sequência crescerá ilimitadamente e não existirá um número A tal que $a_n = A$ para infinitos valores de n. Para este último subcaso o valor mínimo da sequência é 2. Um exemplo já foi apresentado anteriormente:

$$(7, 10, 13, 16, 4, 2, 5, 8, \cdots)$$

Resumindo, somente existirá solução para o problema apresentado quando $a_0 \equiv 0 \bmod 3$, onde $A = 3$ ou $A = 6$ ou $A = 9$. Outras discussões relativas a este problema se encontram em [24].

3.3 Pequeno Teorema de Fermat e Primos Relativos. IMO 2005 P4

3.3.1 Pequeno Teorema de Fermat e Primos Relativos

Dois números inteiros a e b são ditos primos entre si, relativamente primos ou co-primos, quando não existe nenhum fator primo em comum na suas fatorações, que equivale a escrever

$$mdc(a, b) = 1$$

Antes de enunciar e demonstrar o Pequeno Teorema de Fermat precisamos estudar o lema a seguir.

Lema: Seja p um número primo. Os números binomiais $\binom{p}{i}$, onde $0 < i < p$ são todos divisíveis por p.

Exemplo: Verifique que o enunciado do Lema anterior é válido para as linhas 2, 3 e 5 e não para a linha 4 no triângulo de Pascal embaixo

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Demonstração do Lema: Para $i = 1$ temos$\binom{p}{i} = p$ logo p divide $\binom{p}{i}$. Suponha então $1 < i < p$. Pela fórmula binomial temos

$$\binom{p}{i} = \frac{p!}{i!(p-i)!} = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-(i-1))}{i!}$$

Note que $p(p-1)(p-2)\cdots(p-(i-1))$ é um produto de i números naturais consecutivos. Segue que $i!$ divide $p(p-1)(p-2)\cdots(p-(i-1))$. Como $i < p$ e p é primo temos que $i!$ não divide p, logo $i!$ divide $(p-1)(p-2)\cdots(p-(i-1))$. Isto é, $\binom{p}{i} = p \cdot n$, onde n é um número natural. Conclue-se que p divide $\binom{p}{i}\square$

Pequeno Teorema de Fermat: Seja p um número primo, então para qualquer inteiro a o número $a^p - a$ é multiplo de p. Usando a notação da aritmética modular se escreve

$$a^p \equiv a \; mod \; p$$

Exemplo: Se $a = 2$ e $p = 5$, então $2^5 \equiv 2 \; mod \; 5$, e $2^5 - 2 = 30$ é um múltiplo de 5.

Demonstração do Pequeno Teorema de Fermat: Se $p = 2$ então $a^2 - a = a(a-1)$. O número $a(a-1)$ é divisível por 2 pois é o produto de dois inteiros consecutivos.

Suponha agora $p > 2$. A prova continua por indução em a e basta analisar $a \geq 0$. No caso $a = 0$ o enunciado vale pois p divide 0. Suponha, por hipótese de indução, que para um certo a temos que $a^p - a$ é multiplo de p. Iremos provar que isso implica que vale também para $a + 1$. Pela fórmula do Binômio de Newton

$$(a+1)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} a^{p-i} = a^p + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} a^{p-i} + 1$$

Logo

$$(a+1)^p - (a+1) = (a^p - a) + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} a^{p-i}$$

Como p divide $a^p - a$ por hipótese de indução e pelo Lema anterior p divide $\binom{p}{i}$ para todo $0 < i < p$ segue que p divide $(a+1)^p - (a+1)$. Pelo princípio de indução finita o resultado vale para todo $a \geq 0\Box$

Colorário: No caso em que p não divide a o Pequeno Teorema de Fermat é equivalente a afirmar que $a^{p-1} - 1$ é um múltiplo de p, ou

$$a^{p-1} \equiv 1 \; mod \; p$$

Exemplo: Se $a = 2$ e $p = 7$, então $2^6 = 64$ e $64 - 1 = 63$ é um múltiplo de 7.

Demonstração do Colorário: Como p divide $a^p - a$ pelo Pequeno Teorema de Fermat, p não divide a por hipótese e

$$a^p - a = a\left(a^{p-1} - 1\right)$$

temos que p divide $a^{p-1} - 1\Box$

3.3.2 IMO 2005 P4

Determine todos os inteiros positivos relativamente primos com todos os termos da sequência infinita

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1, n \geq 1 \tag{3.3.1}$$

A IMO 2005 foi realizada na cidade de Mérida, México [20]. Problema proposto pela delegação da Polonia [36].

Solução:

Pelo Teorema Fundamental da Aritmética todo número inteiro positivo, $m > 1$, pode ser fatorado de forma única como um produto de $N \in \mathbb{N}$ números primos, p_i

$$m = \prod_{i=1}^{N} p_i^{l_i}$$

onde os $l_i \in \mathbb{N}$. Se algum primo p_i, presente na fatoração de m, dividir algum a_n da sequência, então

$$mdc(m, a_n) \geq p_i > 1$$

Logo m e a_n não serão relativamente primos.

Vamos mostrar que o único inteiro positivo que satisfaz a condição do problema é $m = 1$, pois dado um número primo p sempre encontraremos um valor de n tal que p divide a_n.

Dado que a sequência a_n é uma soma de potências de 2 e 3 procuramos um valor de n tal que 2 divide a_n e 3 divide a_n. Temos $a_1 = 10$ e $a_2 = 48$, como 2 e 3 dividem 48 nenhum múltiplo de 2 ou 3 será um valor permitido de m.

Considere agora primos $p > 3$. Para usarmos o Pequeno Teorema de Fermat faça $n = p - 2$ em (3.3.1)

$$a_{p-2} = 2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1$$

Multiplique por 6 a igualdade anterior

$$6a_{p-2} = 3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6$$

Como $p > 3$ não divide 2, não divide 3 e não divide 6 usando o Pequeno Teorema de Fermat teremos

$$2^{p-1} \equiv 1 \, mod \, p$$

$$3^{p-1} \equiv 1 \, mod \, p$$

$$6^{p-1} \equiv 1 \, mod \, p$$

Segue que

$$6a_{p-2} \equiv 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 - 6 \equiv 0 \, mod \, p$$

Isto é, p divide $6a_{p-2}$. Como $p > 3$, p não divide 6, logo p divide a_{p-2}.

Resumindo, mostramos que para todo primo p existe um n tal que $p \mid a_n$: com $p = 2$ ou 3 faça $n = 2$, para outros valores de p faça $n = p - 2$. Logo, nenhum inteiro positivo, com a exceção de $m = 1$, é relativamente primo com todos os termos da sequência (a_n).

3.4 Divisores de Inteiros Positivos. IMO 2002 P4

Os divisores positivos de um inteiro $n > 1$ são $d_1 < d_2 < ... < d_k$, tais que $d_1 = 1$, $d_k = n$. Seja $s = d_1d_2 + d_2d_3 + \cdots + d_{k-1}d_k$. Mostre que $s < n^2$ e encontre todos os valores de n para os quais s divide n^2.

A IMO 2002 foi realizada na cidade de Glasgow, Reino Unido [20].

Solução:

Podemos escrever a soma s com uma notação mais compacta:

$$s = d_1d_2 + d_2d_3 + \cdots + d_{k-1}d_k = \sum_{1 \le i < k} d_i d_{i+1}$$

Os divisores positivos de um número inteiro $n > 1$ sempre aparecem em pares. No caso em que o número n é um quadrado perfeito um dos pares é formado pelo mesmo divisor ($\sqrt{n}$). Isto é, quando d_i divide n, temos que existe q inteiro tal que $n = d_i \cdot q$, logo $q = \frac{n}{d_i}$ também divide n. Com isto, o somatorio anterior pode ser escrito usando os divisores na forma $\frac{n}{d_i}$:

$$s = \sum_{1 \le i < k} d_i d_{i+1} = \sum_{1 \le i < k} \left(\frac{n}{d_i} \cdot \frac{n}{d_{i+1}} \right) = n^2 \cdot \sum_{1 \le i < k} \left(\frac{1}{d_i} \cdot \frac{1}{d_{i+1}} \right)$$

Note agora que para todo $1 \le i < k$ vale

$$\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_{i+1}} = \frac{d_{i+1} - d_i}{d_i d_{i+1}} \ge \frac{1}{d_i d_{i+1}}$$

pois a diferença entre dois inteiros positivos, $d_{i+1} - d_i$, é sempre maior ou igual a 1. Segue que

$$s = n^2 \cdot \sum_{1 \le i < k} \left(\frac{1}{d_i} \cdot \frac{1}{d_{i+1}} \right) \le n^2 \cdot \sum_{1 \le i < k} \left(\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_{i+1}} \right)$$

O último somatório é uma soma telescópica

$$\sum_{1 \le i < k} \left(\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_{i+1}} \right) = \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{d_{k-1}} - \frac{1}{d_k} \right) = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_k}$$

Com isto temos

$$s \le n^2 \cdot \sum_{1 \le i < k} \left(\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_{i+1}} \right) = n^2 \cdot \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_k} \right)$$

Mas $\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_k} < \frac{1}{d_1}$ pois $d_k = n > 1$ e $d_1 = 1$

$$s \le n^2 \cdot \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_k} \right) < \frac{n^2}{d_1} = n^2$$

Resumindo, provamos que $s < n^2$.

Para a segunda parte do problema note que se $n = p$ é um número primo então somente existem dois divisores de n: $d_1 = 1$ e $d_2 = n$. Segue que

$$s = d_1 d_2 = n$$

Logo, como n divide n^2 temos que s divide n^2.

No caso em que n não é um número primo, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, podemos escrever n como um produto de números primos. Seja p o menor fator primo que aparece na decomposição de n. Teremos que $d_2 = p$ e $d_{k-1} = \frac{n}{p}$. Como $1 = d_1 < d_2 < ... < d_{k-1} < d_k = n$ segue que

$$s = d_1 d_2 + d_2 d_3 + \cdots + d_{k-1} d_k > d_{k-1} d_k = \frac{n}{p} \cdot n$$

Suponha, por absurdo, que $s > \frac{n^2}{p}$ divida n^2. Então deve existir q inteiro positivo tal que $n^2 = s \cdot q$ e $q = \frac{n^2}{s}$ também divide n^2. Mas

$$q = \frac{n^2}{s} < \frac{n^2}{\frac{n^2}{p}} < p$$

ou $q < p$, uma contradição. Tinhamos assumido que p era o menor fator primo que aparece na decomposição de n. Concluímos que s divide n^2 se, e somente se, n é um número primo.

Esta solução é uma versão ampliada de [37].

3.5 Bases Binária e Octal. SL da IMO 1998 P21

3.5.1 Bases Binária e Octal

Um número inteiro não negativo cujos dígitos na base 10 são $a_i \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$, com $i = 1, 2, \cdots, n$, pode ser escrito como:

$$(a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_{10} = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10a_1 + a_0.$$

Em geral, seja $b \geq 2$ um número inteiro, podemos representar um número inteiro não negativo na base b usando os dígitos $a_i \in \{0, 1, \cdots, b-1\}$, com $i = 1, 2, \cdots, n$, e transformá-lo a base decimal como

$$(a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_b = b^n a_n + b^{n-1} a_{n-1} + \cdots + ba_1 + a_0.$$

Em particular, um número inteiro não negativo cujos dígitos na base 8 (Octal) são $a_i \in \{0, 1, 2, \cdots, 7\}$, com $i = 1, 2, \cdots, n$, pode ser escrito na base decimal como:

$$(a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_8 = 8^n a_n + 8^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 8a_1 + a_0$$

e um número inteiro não negativo cujos dígitos na base 2 (Binária) são $a_i \in \{0, 1\}$, com $i = 1, 2, \cdots, n$, pode ser escrito na base decimal como:

$$(a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_2 = 2^n a_n + 2^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 2a_1 + a_0.$$

Exemplos: Dados os números $(7302)_8$ e $(10100)_2$ encontramos

$$(7302)_8 = 2 + 8 \cdot 0 + 8^2 \cdot 3 + 8^3 \cdot 7 = (3778)_{10} = 3778$$

$$(10100)_2 = 0 + 2 \cdot 0 + 2^2 \cdot 1 + 2^3 \cdot 0 + 2^4 \cdot 1 = (21)_{10} = 20.$$

Inversamente, dado um número representado na base decimal podemos escrevê-lo em qualquer outra base usando sucesivamente a divisão pela base com resto ou Euclidiana. O número que no passo n-ésimo for quociente passa a ser dividendo no passo de ordem $n+1$. O processo conclui quando o quociente é zero.

Exercício: Represente $(2019)_{10} = 2019$ nas bases 2 e 8.

Solução: Dividindo sucesivamente por 2 temos

$$2019 = 2 \cdot 1009 + 1$$

$$1009 = 2 \cdot 504 + 1$$

$$504 = 2 \cdot 252 + 0$$

$$252 = 2 \cdot 126 + 0$$

$$126 = 2 \cdot 63 + 0$$

$$63 = 2 \cdot 31 + 1$$

$$31 = 2 \cdot 15 + 1$$

$$15 = 2 \cdot 7 + 1$$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$1 = 2 \cdot 0 + 1$$

Tomando os restos em ordem inversa segue $2019 = (11111100011)_2$.

Análogamente, dividindo sucesivamente por 8 temos

$$2019 = 8 \cdot 252 + 3$$

$$252 = 8 \cdot 31 + 4$$

$$31 = 8 \cdot 3 + 7$$

$$3 = 8 \cdot 0 + 3$$

Tomando os restos em ordem inversa segue $2019 = (3743)_8$.

3.5.2 SL da IMO 1998 P21

Seja $a_0, a_1, a_2, ...$ uma sequência crescente de inteiros não negativos tal que cada número inteiro não negativo possa ser escrito de forma única como

$$a_i + 2a_j + 4a_k \tag{3.5.1}$$

onde i, j, k não são necessariamente diferentes. Determine a_{1998}.

A IMO 1998 foi realizada na cidade de Taipé, Taiwan [20]. O problema acima foi proposto pela delegação do Canadá

[38].

Solução:

Note que devemos escrever de forma única todos os números inteiros não negativos como uma combinação linear (3.5.1) dos elementos da sequência (a_n). Isto leva a que, dada a sequência até o termo de ordem $n-1$, $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$, o termo de ordem n, a_n, é o menor inteiro positivo que não seja da forma $a_i + 2a_j + 4a_k$, com $i,\ j,\ k < n$.

Vamos encontrar os primeiros termos da sequência de forma intuitiva. O primeiro inteiro não negativo é o zero. Para escrever zero na forma em (3.5.1) devemos ter $a_0 = 0$:

$$0 = a_0 + 2a_0 + 4a_0 = 0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0.$$

Não temos como escrever 1 usando somente $a_0 = 0$. Isto leva a adicionar o número 1 na sequência (a_n), logo $a_1 = 1$. Com isso podemos escrever os números do 1 ao 7 usando somente dois elementos da sequência $a_0 = 0,\ a_1 = 1$:

$$1 = a_1 + 2a_0 + 4a_0 = 1 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0,$$

$$2 = a_0 + 2a_1 + 4a_0 = 0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0,$$

$$3 = a_1 + 2a_1 + 4a_0 = 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0,$$

$$4 = a_0 + 2a_0 + 4a_1 = 0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1,$$

$$5 = a_1 + 2a_0 + 4a_1 = 1 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1,$$

$$6 = a_0 + 2a_1 + 4a_1 = 0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1,$$

$$7 = a_1 + 2a_1 + 4a_1 = 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1.$$

O número 8 não pode ser escrito usando somente dois elementos da sequência: $a_0 = 0,\ a_1 = 1$. Isto leva a adicionar o número 8 na sequência (a_n), logo $a_2 = 8$:

$$8 = a_2 + 2a_0 + 4a_0 = 8 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0$$

O número 9 não pode ser escrito usando somente três elementos da sequência: $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 8$. Isto leva a adicionar o número 9 na sequência (a_n), logo $a_3 = 9$. Com quatro elementos da sequência é possível escrever os números do 9 até o 63:

$$9 = a_3 + 2a_0 + 4a_0 = 9 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0,$$

$$63 = a_3 + 2a_3 + 4a_3 = 9 + 2 \cdot 9 + 4 \cdot 9.$$

Segue que $a_4 = 64$ *e* $a_5 = 65$. Resumindo, os primeiros termos da sequência são

$$(a_n) = (0, 1, 8, 9, 64, 65, \cdots).$$

Sabemos que todo número inteiro não negativo m pode ser escrito de forma única na base binária:

$$m = 2^0 t_0 + 2^1 t_1 + 2^2 t_2 + 2^3 t_3 + \cdots + 2^r t_r \tag{3.5.2}$$

com $t_i \in \{0, 1\}$ e $i = 0, 1, 2, \cdots, r$. Por outro lado, queremos escrever m como em (3.5.1):

$$m = 2^0 a_i + 2^1 a_j + 2^2 a_k \tag{3.5.3}$$

Uma comparação entre (3.5.2) e (3.5.3) sugere escolher a_i, a_j e a_k como somas finitas:

$$a_i = t_0 + 2^3 t_3 + 2^6 t_6 + \cdots = t_0 + 8t_3 + 8^2 t_6 + \cdots$$

$$a_j = t_1 + 2^3 t_4 + 2^6 t_7 + \cdots = t_1 + 8t_4 + 8^2 t_7 + \cdots$$

$$a_k = t_2 + 2^3 t_5 + 2^6 t_8 + \cdots = t_2 + 8t_5 + 8^2 t_8 + \cdots$$

As três equações anteriores podem ser reescritas como

$$a_n = s_0 + 8s_1 + 8^2 s_2 + \cdots + 8^r s_r \tag{3.5.4}$$

onde $s_i \in \{0, 1\}$ e $i = 0, 1, 2, \cdots, r$. Em palavras, a sequência (a_n) consiste dos números inteiros não negativos que podem ser escritos em base 8 usando somente zeros e uns.

Para encontrar um termo arbitrário de (a_n) devemos escrever primeiro n em base 2:

$$n = s_0 + 2s_1 + 2^2 s_2 + \cdots + 2^r s_r \tag{3.5.5}$$

Os s_i em (3.5.5) coincidem com os s_i em (3.5.4). Veja os primeiros termos já encontrados

$$0 = 0 + 2 \cdot 0 \quad , \quad a_0 = 0 + 8 \cdot 0 = 0,$$

$$1 = 1 + 2 \cdot 0 \quad , \quad a_1 = 1 + 8 \cdot 0 = 1,$$

$$2 = 0 + 2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 0 \quad , \quad a_2 = 0 + 8 \cdot 1 + 8^2 \cdot 0 = 8,$$

$$3 = 1 + 2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 0 \quad , \quad a_3 = 1 + 8 \cdot 1 + 8^2 \cdot 0 = 9,$$

$$4 = 0 + 2 \cdot 0 + 2^2 \cdot 1 + 2^3 \cdot 0 \quad , \quad a_4 = 0 + 8 \cdot 0 + 8^2 \cdot 1 + 8^3 \cdot 0 = 64,$$

$$5 = 1 + 2 \cdot 0 + 2^2 \cdot 1 + 2^3 \cdot 0 \quad , \quad a_5 = 1 + 8 \cdot 0 + 8^2 \cdot 1 + 8^3 \cdot 0 = 65.$$

Como queremos encontrar a_{1998} escreveremos primeiro $1998 = (11111001110)_2$ em base 2:

$$1998 = 0 + 2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1 + 2^3 \cdot 1 + 2^4 \cdot 0 + 2^5 \cdot 0 + 2^6 \cdot 1 + 2^7 \cdot 1 + 2^8 \cdot 1 + 2^9 \cdot 1 + 2^{10} \cdot 1$$

Segue que

$$a_{1998} = 0 + 8 \cdot 1 + 8^2 \cdot 1 + 8^3 \cdot 1 + 8^4 \cdot 0 + 8^5 \cdot 0 + 8^6 \cdot 1 + 8^7 \cdot 1 + 8^8 \cdot 1 + 8^9 \cdot 1 + 8^{10} \cdot 1 = 1227096648$$

3.6 Código Primo-Binário. SL da IMO 1995 P25

Considere números inteiros $x \geq 1$ e seja $p(x)$ o menor primo que não divide x. Em particular, $p(1) = 2$. Quando $p(x) = 2$, defina $q(x) = 1$. caso contrário, defina $q(x)$ como o produto de todos os primos menores que $p(x)$. Considere a sequencia $x_0, x_1, x_2, ...$ definida por $x_0 = 1$ e $x_{n+1} = \frac{x_n p(x_n)}{q(x_n)}$ para todo $n \geq 0$. Encontre todos os valores de n tal que $x_n = 1995$.

A IMO 1995 foi realizada na cidade de Toronto, Canada [20]. O problema acima foi proposto pela delegação da Polônia [38].

Solução:

Como $q(x)$ é definida por um produto de primos que dividem individualmente x ou $q(x) = 1$, segue que $q(x)$ divide x para todos os números inteiros $x \geq 1$, logo $f(x) = \frac{xp(x)}{q(x)}$ também é um número inteiro positivo.

A Tabela 3.6.1 ilustra o cálculo dos primeiros termos da sequência.

Seja $(p_0, p_1, p_2, ..) = (2, 3, 5, 7, 11, \cdots)$ a sequência de todos os números primos escritos em ordem crescente.

n	$p(x_{n-1})$	$q(x_{n-1})$	x_n	x_n fatorado	Cx_n
0			1		0
1	2	1	2	2	1
2	3	2	3	3	10
3	2	1	6	$3 \cdot 2$	11
4	5	6	5	5	100
5	2	1	10	$5 \cdot 2$	101
6	3	2	15	$5 \cdot 3$	110
7	2	1	30	$5 \cdot 3 \cdot 2$	111
8	7	30	7	7	1000
9	2	1	14	$7 \cdot 2$	1001
10	3	2	21	$7 \cdot 3$	1010
11	2	1	42	$7 \cdot 3 \cdot 2$	1011
12	5	6	35	$7 \cdot 5$	1100
13	2	1	70	$7 \cdot 5 \cdot 2$	1101
14	3	2	105	$7 \cdot 5 \cdot 3$	1110
15	2	1	210	$7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2$	1111
16	11	210	11	11	10000
17	2	1	22	$11 \cdot 2$	10001

Tabela 3.6.1: Cálculo dos primeiros termos das sequências (x_n) e (Cx_n).

Note primeiro que na decomposição de x_n em fatores primos nenhum primo pode aparecer elevado a uma potência superior a um. De fato, isto é verdade para os primeiros 17 termos listados na Tabela 3.6.1. Para completar a demostração por indução em n observe que se por hipótese $x_n = p_{n_1} \cdot p_{n_2} \cdot \cdots \cdot p_{n_m}$, então $p(x_n)$ não é nenhum dos

p_{n_k} anteriores com $1 \leq k \leq m$. Segue que o produto $x_n p(x_n)$ não terá, na sua decomposição, nenhum quadrado de primo. Dividir por $q(x_n)$ somente reduz (ou deixa igual quando $q(x) = 1$) o número de primos presentes na fatoração de x_n. Segue que $x_{n+1} = \frac{x_n p(x_n)}{q(x_n)}$ é livre de potências superiores a um para todo n.

Como cada número primo aparece somente uma vez (ou não aparece) na fatoração de x_n podemos associar de forma única a x_n um código: $Cx_n = \cdots 000 s_l s_{l-1} \cdots s_0$. Onde $s_i = 1$ se p_i divide x_n e $s_i = 0$ se p_i não divide x_n com $0 \leq i \leq l$. Adicionalmente, p_l é o maior primo que divide x_n.

A seguir vamos enunciar e justificar o resultado principal. A representação binária de n coincide com código de x_n. Isto é, $(n)_2 = Cx_n$. Veja na Tabela 3.6.1 a primeira e última colunas.

No caso em que x_n é ímpar temos que $Cx_n = \cdots 000 s_l s_{l-1} \cdots s_1 0$ termina em 0, pois 2 não divide x_n. Segue que $p(x_n) = 2$ e $q(x_n) = 1$. Logo $x_{n+1} = \frac{x_n \cdot 2}{1}$ é par e $Cx_n = \cdots 000 s_l s_{l-1} \cdots s_1 1$ tem o mesmo código de x_n com o primeiro dígito da direita para esquerda trocado de 0 para 1.

Quando x_n é par temos que Cx_n termina em 1 pois 2 divide x_n. Estudaremos dois subcasos:

(1) $Cx_n = \cdots 000 s_k 11 \cdots 1$ o código de x_n é somente composto de uns, de s_k em diante é tudo zero e
(2) $Cx_n = \cdots 00 s_m \cdots s_{k+1} s_k 11 \cdots 1$ o código de x_n é composto de uns de s_0 até s_{k-1}, $s_k = 0$, de s_{k+1} a s_{m-1} os valores podem ser zero ou um, $s_m = 1$ e de s_{m+1} em diante é tudo zero.

(1) Se $Cx_n = \cdots 000 s_k 11 \cdots 1$ temos que $p(x_n) = p_k$ e $q(x_n) = x_n$. Segue que $x_{n+1} = p_k$ e $Cx_{n+1} = \cdots 000100 \cdots 0$ com o 1 na posição k-ésima de direita para esquerda.

(2) Se $Cx_n = \cdots 00 s_m \cdots s_{k+1} s_k 11 \cdots 1$ temos que $p(x_n) = p_k$ e $q(x_n) = p_0 \cdot p_1 \cdot \cdots \cdot p_{k-1}$. Segue que $Cx_{n+1} = \cdots 00 s_m \cdots s_{k+1} 100 \cdots 0$.

Logo, o efeito da lei de recorrência f sobre o código de x_n é acrescentar um na representação binária de n, isto é, $Cx_{n+1} = f(Cx_n) = (n+1)_2$. Em outras palavras, $(n)_2 = Cx_n$ e x_n determina univocamente n.

Como estamos interessados em encontrar n tal que $x_n = 1995$, primeiro fatoramos 1995:

$$1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 = 2^0 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \cdot 17^0 \cdot 19$$

A seguir escrevemos o código de 1995:

$$C(1995) = 10001110$$

e isto corresponde a $n = (10001110)_2 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^7 = 142$.

3.7 Representação de Naturais na forma $2^r b$. SL da IMO 1992 P14.

Para todo número inteiro positivo x define-se $g(x)$ como o maior divisor ímpar de x e

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x}{g(x)}, & \text{se } x \text{ é par} \\ 2^{\frac{x+1}{2}}, & \text{se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Construa a sequência $x_1 = 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Determine n tal que $x_n = 1992$.

A IMO 1992 foi realizada na cidade de Moscou, Rússia [20]. O problema acima foi proposto pela delegação da Polônia [38].

Solução:

Note primeiro que pela definição da função f temos que x_n é um número natural para todo n natural.

Pelo Teorema Fundamental da Aritmética todo número inteiro positivo $x_n \geq 1$ pode ser escrito de forma única como um produto de números primos:

$$x_n = 2^r \cdot p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \cdots \cdot p_j^{m_j}$$

onde os p_i, com $i = 1, 2, \cdots, j$, são primos ímpares e r e os m_i são naturais ou zero. Como um produto de números ímpares também é ímpar podemos representar qualquer natural de forma única como

$$x_n = 2^r \cdot b$$

com b natural ímpar. Isto é, b é o maior ímpar a dividir x_n. Adicionalmente, quando $r = 0$ temos x_n ímpar, caso contrário x_n é par.

A tabela 3.7.1 mostra os primeiros termos da sequência (x_n).

Vamos estudar o comportamento da sequência entre duas potências consecutivas de dois. Por exemplo, entre $16 = 2^4$ e $32 = 2^5$.

Suponha que para algum $m > 0$ e $r > 0$ natural $x_m = 2^r$. Como x_m é par teremos que $x_{m+1} = 2^{r-1} \cdot 3$. Caso $r - 1 > 0$ teremos que x_{m+1} continuará sendo par e usando novamente a lei de recorrência encontramos $x_{m+2} = 2^{r-2} \cdot 5$. Em geral, com $i = 1, 2, \cdots, r-1$, a função f leva a $x_{m+i} = 2^{r-i} \cdot (2i+1)$. Para concluir a prova deste resultado por indução em i note que sendo $i < r$ segue que x_{m+i} é par e $f(x_{m+i}) = x_{m+i+1} = 2^{r-i-1} \cdot (2i+3)$.

Quando $i = r - 1$ temos $x_{m+r-1} = 2 \cdot (2r-1)$ par e $f(x_{m+r-1}) = x_{m+r} = (2r+1)$ é ímpar. Aplicando mais uma vez a lei de recorrência encontramos $f(x_{m+r}) = x_{m+r+1} = 2^{r+1}$.

A tabela 3.7.2 resume estes resultados.

Note que quando n cresce de m até $m + r$ a potência de dois decresce, de um em um, de r até zero e b aumenta

n	x_n	r	$b = g(x_n)$	$x_{n+1} = f(x_n)$
1	1	0	1	2
2	2	1	1	3
3	3	0	3	4
4	4	2	1	6
5	6	1	3	5
6	5	0	5	8
7	8	3	1	12
8	12	2	3	10
9	10	1	5	7
10	7	0	7	16
11	16	4	1	24
12	24	3	3	20
13	20	2	5	14
14	14	1	7	9
15	9	0	9	32
16	32	5	1	48
17	48	4	3	40
18	40	3	5	28
19	28	2	7	18
20	18	1	9	11
21	11	0	11	64

Tabela 3.7.1: Cálculo dos primeiros termos da sequência (x_n).

	n	x_n	r	$b = g(x_n)$	$x_{n+1} = f(x_n)$
k	m-1	$(2r-1)$	0	$(2r-1)$	2^r
	m	2^r	r	1	$2^{r-1} \cdot 3$
	m+1	$2^{r-1} \cdot 3$	r-1	3	$2^{r-1} \cdot 5$
	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
	m+i	$2^{r-i} \cdot (2i+1)$	r-i	$(2i+1)$	$2^{r-i-1} \cdot (2i+3)$
	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
	m+r-1	$2 \cdot (2r-1)$	1	$(2r-1)$	$(2r+1)$
k+1	m+r	$(2r+1)$	0	$(2r+1)$	2^{r+1}
	m+r+1	2^{r+1}	r+1	1	$2^r \cdot 3$

Tabela 3.7.2: Comportamento da sequência (x_n), r e b entre duas potências consecutivas de dois. O índice k é usado somente quando x_n é ímpar.

de dois em dois.

Concentremos agora a atenção na presença de números ímpares na sequência (x_n). Pode ser introduzido um número natural k para descrever n e x_n ímpar. Quando k aumenta em um, x_n ímpar aumenta em 2 e o valor de n correspondente aumenta em $r+1$. Isto é, $n = \sum_{r=0}^{k-1}(r+1)$.

Segue que se $k = 1, 2, \cdots$, então

$$n = 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \tag{3.7.1}$$

e

$$x_{\frac{k(k+1)}{2}} = 2k - 1 \tag{3.7.2}$$

é ímpar.

A tabela 3.7.3 mostra os primeiros valores de k, n e x_n ímpar.

Para determinar n tal que $x_n = 1992$ primeiro fatoramos 1992 para escrever na forma $2^r \cdot b$:

k	n	x_n(ímpar)
1	1=1	$1 = 2 \cdot 1 - 1$
2	3=1+2	$3 = 2 \cdot 2 - 1$
3	6=1+2+3	$5 = 2 \cdot 3 - 1$
4	10=1+2+3+4	$7 = 2 \cdot 4 - 1$
5	15=1+2+3+4+5	$9 = 2 \cdot 5 - 1$
6	21=1+2+3+4+5+6	$11 = 2 \cdot 6 - 1$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
k	1+2+$\cdots$+k	$2 \cdot k - 1$

Tabela 3.7.3: Primeiros valores de k, n e x_n ímpar.

$$1992 = 2^3 \cdot 3 \cdot 83 = 2^3 \cdot 249$$

Segue que $r = 3$ e $b = 249$ em $x_n = 1992$. Aplicando a relação de recorrência f encontramos $r = 2$ e $b = 251$ em x_{n+1}(par), $r = 1$ e $b = 253$ em x_{n+2} (par) e $r = 0$ e $b = 255$ em x_{n+3} (ímpar).

A tabela 3.7.4 resume estes resultados:

Como $x_{n+3} = 255$ é impar podemos encontrar o valor de k usando (3.7.2):

n	x_n	r	$b = g(x_n)$	$x_{n+1} = f(x_n)$
n	1992	3	249	1004
n+1	1004	2	251	506
n+2	506	1	253	255
n+3	255	0	255	

Tabela 3.7.4: Cálculo para determinar n tal que $x_n = 1992$.

$$255 = 2 \cdot 128 - 1$$

Isto é, $k = 128$. A seguir usamos (3.7.1) para encontrar

$$n + 3 = \frac{128 \cdot 129}{2} = 8256$$

Finalmente, $n = 8253$ e $x_{8253} = 1992$.

3.8 Base Três, Progressão Aritmética e Geométrica. IMO 1983 P5

Prove que é verdadeiro ou que é falso: Do intervalo $[1, 30000]$ pode ser selecionado um subconjunto de 1000 inteiros que não contém tripla aritmética (três números consecutivos em progressão aritmética).

A IMO 1983 foi realizada na cidade de Paris, França [20]. O problema acima foi proposto pela delegação da Polônia [38].

Solução:

Seja $\{T_n\}$ o conjunto de inteiros positivos que na base três é representado por, no máximo, n dígitos e nenhum deles é 2. Isto é,

$$T_n = a_0 \cdot 3^0 + a_1 \cdot 3^1 + \cdots + a_{n-1} \cdot 3^{n-1} \tag{3.8.1}$$

com $a_i \in \{0, 1\}$ para $0 \leq i \leq (n-1)$. Como para cada a_i somente existem duas possibilidades, zero ou um, e existem n escolhas, a cardinalidade, ou número de elementos, de $\{T_n\}$ é

$$\mid T_n \mid = 2^n. \tag{3.8.2}$$

O maior elemento de $\{T_n\}$ é encontrado quando todos os coeficientes são iguais a um:

$$max\,\{T_n\} = 3^0 + 3^1 + \cdots + 3^{n-1} \tag{3.8.3}$$

Mas a equação anterior é uma soma de uma progressão geométrica de razão 3, logo

$$max\,\{T_n\} = \frac{3^n - 1}{2} \tag{3.8.4}$$

Proposição: Não existe tripla aritmética em $\{T_n\}$.

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que exista uma tripla aritmética (x, y, z) tal que seus elementos sejam um subconjunto de $\{T_n\}$: $\{x, y, z\} \subset \{T_n\}$ Como x, y e z são inteiros consecutivos de uma progressão aritmética vale que

$$2y = x + z \tag{3.8.5}$$

Com $y \in \{T_n\}$ segue que os coeficientes de $2y$, lado esquerdo de (3.8.5), na base 3 são somente 0 ou 2:

$$y = a_{0y} \cdot 3^0 + a_{1y} \cdot 3^1 + \cdots + a_{(n-1)y} \cdot 3^{n-1}$$

com $a_{iy} \in \{0,1\}$ para $0 \leq iy \leq (n-1)$ e

$$2y = (2 \cdot a_{0y}) \cdot 3^0 + (2 \cdot a_{1y}) \cdot 3^1 + \cdots + \left(2 \cdot a_{(n-1)y}\right) \cdot 3^{n-1}$$

com $2 \cdot a_{iy} \in \{0,2\}$ para $0 \leq iy \leq (n-1)$.

Estudaremos agora o lado direito de (3.8.5). Temos que $x, z \in \{T_n\}$, logo podemos escrever

$$x = a_{0x} \cdot 3^0 + a_{1x} \cdot 3^1 + \cdots + a_{(n-1)x} \cdot 3^{n-1}$$

$$z = a_{0z} \cdot 3^0 + a_{1z} \cdot 3^1 + \cdots + a_{(n-1)z} \cdot 3^{n-1}$$

com $a_{ix}, a_{iz} \in \{0,1\}$ para $0 \leq ix, iz \leq (n-1)$. Note que a soma $a_{ix} + a_{iz} \in \{0,2\}$ quando $a_{ix} = a_{iz} = 0$ ou $a_{ix} = a_{iz} = 1$ para todo $0 \leq ix, iz \leq (n-1)$. Isto é, no caso em que

$$x = z$$

e por (3.8.5) $x = y = z$. Contradição, $x \neq y \neq z$. Como os lados direito e esquerdo de (3.8.5) são incompatíveis concluimos que não existe tripla aritmética em $\{T_n\}\square$

Considere $n = 10$, de (3.8.2) e (3.8.4) calculamos

$$\mid T_{10} \mid = 2^{10} = 1024 > 1000$$

$$max\,\{T_{10}\} = \frac{3^{10}-1}{2} = 29524 < 30000$$

Logo, a afirmação do problema é verdadeira. O conjunto $\{T_n\}$ é um subconjunto de $[1, 30000]$ com mais de 1000 inteiros e não contiene tripla aritmética.

3.9 Máximo de um produto de inteiros com soma fixa. Equação Diofantina Linear. IMO 1976 P4

Encontre o maior número que pode ser obtido pelo produto de inteiros positivos cuja soma é 1976.

A IMO 1976 foi realizada na cidade de Lienz, Austria [20]. O problema acima foi proposto pela delegação dos Estados Unidos [38].

Solução:

Sejam $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ inteiros positivos tais que sua soma seja 1976:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1976 \tag{3.9.1}$$

Seja M o valor maximo do produto $a_1 a_2 \cdots a_n$:

$$M = max\{a_1 a_2 \cdots a_n\} \tag{3.9.2}$$

Primeiro, $a_i > 1$ para todo $1 \leq i \leq n$, pois caso $a_k = 1$ para algum k conseguimos aumentar o produto trocadondo a_k e a_j (outro termo da sequência) por um único número $a_j + 1$ e vale que

$$a_k a_j = a_j < a_j + 1$$

Segundo, a diferença entre dois elementos quaisqueis da sequência (a_n) tem que ser zero ou um. Suponha, por absurdo, que $a_k - a_j \geq 2$ para algum par $1 \leq k, j \leq n$. Neste caso conseguimos aumentar o produto trocando a_k e a_j por $a_k - 1$ e $a_j + 1$ pois

$$a_k a_j < (a_k - 1)(a_j + 1) = a_k a_j + (a_k - a_j) - 1$$

Terceiro, $a_i < 5$ para todo $1 \leq i \leq n$. Suponha, por absurdo, que $a_k \geq 5$ para algum $1 \leq k \leq n$. Neste caso conseguimos aumentar o produto trocando o elemento a_k por outros dois: 2 e $(a_k - 2)$. Note que

$$a_k < 2(a_k - 2) = 2a_k - 4$$

Quarto, no caso $a_i = 4$ para algum $1 \leq i \leq n$ podemos trocar o elemento a_i por 2 e 2 e o produto continua igual.
Concluimos que $a_i = 2$ ou $a_i = 3$ para todo $1 \leq i \leq n$.
Seja x o número de dois e y o número de três na sequência (a_n). Segue que as esquações (3.9.1) e (3.9.2) podem ser escritas como

$$2x + 3y = 1976 \tag{3.9.3}$$

$$M = 2^x 3^y \tag{3.9.4}$$

Reescrevendo (3.9.3) como uma congruência módulo três encontramos

$$2x \equiv 1976 \equiv 2 \quad mod\, 3$$

Logo $x \equiv 1\, mod\, 3$ ou $x = 3t + 1$ para algum t inteiro não negativo.

Note agora que $x < 4$ pois $2{\cdot}2{\cdot}2 < 3{\cdot}3$. Isto é, $x = 1$. Retornando com este último resultado em (3.9.3) encontramos que $y = 658$.

Segue de (3.9.4) que $M = 2 \cdot 3^{658}$.

Capítulo 4

Combinatória

4.1 Triângulo do Módulo da Diferença ou Anti-Pascal. IMO 2018 P3

Os números triângulares são aqueles que são gerados na sequência

$$(1, 1+2, 1+2+3, \cdots, 1+2+3+\cdots+n)$$

Como o termo n-ésimo é a soma de uma progressão aritmética de passo 1 podemos escrever:

$$\left(1, 3, 6, \cdots, \frac{n\,(n+1)}{2}\right)$$

Uma interpretação geométrica pode ser vista na figura 4.1.

O triângulo de Pascal é formado por números binomiais

$$\tbinom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

onde n representa o número da linha e k representa o número da coluna, iniciando a contagem a partir do zero (de cima para baixo e de esquerda para direita).

A relação de Stifel permite sua construção rápidamente:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Em palavras, cada número do triângulo de Pascal é igual à soma do número imediatamente acima e do antecessor do número de cima.

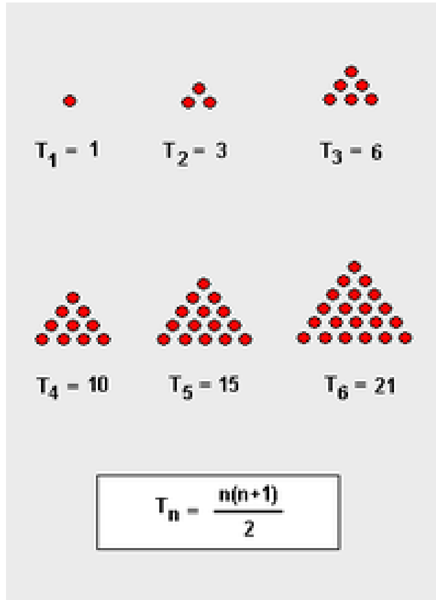

Figura 4.1: Seis primeiros números triângulares,https://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_triangular

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	$\overline{\underline{6}}$	$\overline{\underline{4}}$	1	
5	1	5	10	$\overline{\underline{10}}$	5	1

No diagrama anterior foi destacada a soma:

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}$$

Na sua forma simétrica falamos que, exceto os extremos que são iguais a 1, cada número do triângulo de Pascal é igual à soma dos dois números acima mais próximos.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & & & & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\ & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\ 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \end{array}$$

O problema a seguir introduz uma variação do triângulo de Pascal, no lugar de usar a soma no processo de construção dos próximos elementos é usado o módulo da diferença. A construção é feita de baixo para cima e, para um triângulo com n linhas, devem aparecer, exatamente uma vez, todos os números inteiros de 1 até $\frac{n(n+1)}{2}$.

4.1.1 IMO 2018 P3

Um triângulo anti-Pascal é uma disposição de números em forma de triângulo equilátero tal que, exceto para os números na última linha, cada número é o módulo da diferença entre os dois números imediatamente abaixo dele. Por exemplo, a seguinte disposição de números é um triângulo anti-Pascal com quatro linhas que contém todos os inteiros de 1 até 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Determine se existe um triângulo anti-Pascal com 2018 linhas que contenha todos os inteiros de 1 até $1+2+3+\cdots+2018$.

A IMO 2018 foi realizada na cidade Cluj-Napoca, Romênia [20]. Problema proposto por Morteza Saghafian, Iran [22].

Solução:

4.1.1.1 Caso $n = 5$

O diagrama a seguir ilustra uma solução do problema no caso $n = 5$, note que aparecem, exatamente uma vez, todos os inteiros de 1 até $1+2+3+4+5=15$.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 5 & & & & \\ & & & 4 & & 9 & & & \\ & & 7 & & 11 & & 2 & & \\ & 8 & & 1 & & 12 & & 10 & \\ 6 & & 14 & & 15 & & 3 & & 13 \end{array}$$

Foram destacados com cor azul o maior número de cada linha e com cor vermelha o menor número de cada linha. No caso da primeira linha seu único elemento, ou 5, é simultâneamente o maior e o menor. Os números destacados formam o esqueleto da construção:

$$12 = 15 - 3$$

$$11 = 12 - 1$$

$$9 = 11 - 2$$

$$5 = 9 - 4$$

Note que o maior número, o 15, deve aparecer na última linha. Todos os inteiros de 1 até 5 são os menores em suas respetivas linhas, isto é, aparece exatamente um deles por linha. Por outro lado, os inteiros maiores ou iguais a $1+2+3+4=10$ e menores ou iguais a $1+2+3+4+5=15$ (6 em total) aparecem nas últimas linhas: um na terceira, dois na quarta e três quinta. Verifique esse padrão no caso $n=4$ dado no problema.

4.1.1.2 Não existe solução para $n = 2018$

Suponhamos, por absurdo, que um triângulo com as condições dadas exista. Ele deve ter, exatamente uma vez, todos os números inteiros de 1 até $1+2+3+\cdots+2018$.

Denotaremos por M_n o maior número na linha n-ésima e por m_n ao menor número na linha n-ésima. Na linha 1, como somente existe um elemento, temos que $M_1 = m_1$.

Considere agora que não estamos na última linha, isto é, $n \leq 2017$, e na linha n-ésima localize o maior número, M_n. Chame de a e b aos números na linha $n+1$ diretamente abaixo de M_n. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $a > b$. Logo, pelas condições do problema, temos que $a - b = M_n$.

M_n

a b

Como $M_{n+1} \geq a$ e $b \geq m_{n+1}$, podemos escrever

$$M_{n+1} - m_{n+1} \geq M_n$$

ou

$$M_{n+1} \geq M_n + m_{n+1}$$

Isto é, para $1 \leq i < j \leq 2018$, escrevemos

$$M_{i+1} \geq M_i + m_{i+1}$$

$$M_{i+2} \geq M_{i+1} + m_{i+2} \geq M_i + m_{i+1} + m_{i+2}$$

$$M_{i+3} \geq M_{i+2} + m_{i+3} \geq M_i + m_{i+1} + m_{i+2} + m_{i+3}$$

Onde expandimos a segunda e terceira linha usado as anteriores. Logo, generalizando temos

$$M_j \geq M_i + \sum_{k=i+1}^{j} m_k$$

Para $i = 1$ e $j = 2018$, e lembrando que $M_1 = m_1$, escrevemos

$$M_{2018} \geq \sum_{k=1}^{2018} m_k \tag{4.1.1}$$

Em palavras, a equação anterior diz que o maior número na linha de ordem 2018 tem que ser maior ou igual a soma de 2018 números. Pelo enunciado do problemas todos os números na soma precisam ser diferentes. Por outro lado, o maior número que pode aparecer no triângulo é $1 + 2 + 3 + \cdots + 2018$. Segue que

$$M_{2018} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2018 \tag{4.1.2}$$

e os menores números de cada linha

$$(m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{2018})$$

são uma permutação de

$$\{1, 2, 3, \ldots, 2018\} \tag{4.1.3}$$

Uma vez que vale a igualdade (4.1.2) podemos concluir que para existir o triângulo referido no problema a igualdade dada em (4.1.1) deve valer para todo $1 \leq j \leq 2018$, isto é

$$M_j = \sum_{k=1}^{j} m_k \tag{4.1.4}$$

A equação anterior diz que o maior número de cada linha deve ser igual a soma dos menores números das linhas de ordem precedente e da própria linha e estes números (m_k) pertencem ao conjunto (4.1.3). Teremos exatamente um número "pequeno", de 1 até 2018, em cada linha (não necessariamente em ordem crescente).
Por outro lado, chamaremos de "grandes" aos 2019 números que satisfazem

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 2017 \leq n \leq 1 + 2 + 3 + \cdots + 2017 + 2018$$

ou

$$2035153 \leq n \leq 2037171$$

A equação (4.1.4) também implica que os números "grandes" não podem aparecer nas linhas de ordem menor ou igual a um certo h. De fato, considere os h maiores valores possíveis para os m_k.

$$M_h = \sum_{k=1}^{h} m_k < 2018 + (2018 - 1) + \cdots + (2018 - h + 1) < 2035153 \tag{4.1.5}$$

ou

$$M_h < \frac{(4037 - h)h}{2} < 2035153 \tag{4.1.6}$$

A desigualdade anterior leva uma equação quadrática que somente tem uma solução válida para este problema se $h < 1955$. Agora separamos o estudo em três intervalos: $n \leq 1954$, $1955 \leq n \leq 2017$ e $n = 2018$.

- Se $n \leq 1954$ temos que

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \leq \underbrace{2018 + 2017 + 2016 + \cdots + 65}_{1954 - números}$$

$$= (1 + 2 + 3 + \cdots + 2018) - (1 + 2 + 3 + \cdots + 64)$$

$$= (1 + 2 + 3 + \cdots + 2018) - 2080$$

$$< 1 + 2 + 3 + \cdots + 2017$$

logo a linha n-ésima não tem nenhum número "grande".

- Se $1955 \leq n \leq 2017$, chame l_1 a um número "grande" na linha n-ésima. Como fizemos anteriormente, chame de a e b, com $a > b$, aos números diretamente abaixo de l_1. Temos que $b = a - l_1$ e $a < 1+2+3+\cdots+2018$, como l_1 é "grande", teremos $b \leq 2018$, isto é, b é "pequeno". Como somente existe um número "pequeno" por linha devemos ter que $b = m_{n+1}$ e l_1 está diretamente acima de m_{n+1}. Pelo mesmo motivo pode acontecer de existir um segundo número "grande", l_2, na linha n-ésima, abjacente a l_1 e diretamente acima de m_{n+1}. Com isto temos no máximo dois números grandes na linha n-ésima. Ao todo teremos no máximo $2(2017-1955+1) = 126$ números "grandes" fora da última linha.

- $n = 2018$. Como temos ao todo 2019 números "grandes", teremos no mínimo $2019 - 126 = 1893$ números "grandes" na última linha. Isso significa no máximo $2018 - 1893 = 125$ números "não-grandes" na última linha. Logo, no mínimo será possível encontrar $\frac{1893-125}{2} = 884$ pares de números "grandes abjacentes". Basta escolher um par de números "grandes abjacentes" na última linha que não esteja diretamente abaixo de m_{2017}. O módulo da diferença deste par de números será um número "pequeno" na linha de ordem 2017 diferente de m_{2017}. Mas isso é um absurdo, pois somente pode existir um número "pequeno" por linha. Isto é, não existe o triângulo anti-Pascal de 2018 linhas.

De fato, foi provado em [23] que não existe triângulo anti-Pascal de mais de 5 linhas.

4.2 Partição de um Conjunto. SL da IMO 1990 P15

Determine para quais inteiros positivos k o conjunto

$$X = \{1990, 1990 + 1, 1990 + 2, \cdots, 1990 + k\}$$

pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos A e B tais que a soma dos elementos de A seja igual a soma dos elementos de B.

A IMO 1990 foi realizada na cidade de Beijing, China [20]. O problema acima foi proposto pela delegação do México [38].

Solução:

Os elementos do conjunto X formam uma progressão aritmética de passo 1 e valor inicial 1990 e sua soma será:

$$S(X) = \frac{(1990 + 1990 + k)}{2} \cdot (k + 1) = 1990 \cdot (k + 1) + \frac{k(k + 1)}{2} \tag{4.2.1}$$

Como queremos que a soma dos elementos de A seja igual a soma dos elementos de B e estes conjuntos são disjuntos segue que

$$S(A) = S(B) = \frac{S(X)}{2} = 995 \cdot (k + 1) + \frac{k(k + 1)}{4} \tag{4.2.2}$$

Sendo A e B subconjuntos de X suas somas, $S(A)$ e $S(B)$, são números inteiros, logo $S(X)$ deve ser um número par. Isto somente acontece quando 4 divide $k(k + 1)$.

Existem quatro possibilidades para k: (i) $k = 4r$, (ii) $k = 4r + 1$, (iii) $k = 4r + 2$ e (iv) $k = 4r + 3$ com r inteiro positivo ou zero.

(i) Se $k = 4r$, então $k(k + 1) = 4r(4r + 1)$ e 4 divide $4r(4r + 1)$.

(ii) Se $k = 4r + 1$, então $k(k + 1) = (4r + 1)(4r + 2) = 2(4r + 1)(2r + 1)$ e 4 não divide $2(4r + 1)(2r + 1)$.

(iii) Se $k = 4r + 2$, então $k(k + 1) = (4r + 2)(4r + 3) = 2(2r + 1)(4r + 3)$ e 4 não divide $2(2r + 1)(4r + 3)$.

(iv) Se $k = 4r + 3$, então $k(k + 1) = (4r + 3)(4r + 4) = 4(4r + 3)(r + 1)$ e 4 divide $4(4r + 3)(r + 1)$.

- Suponhamos primeiramente que vale (iv) $k = 4r + 3$. Neste caso X pode ser particionado em subconjuntos disjuntos e consecutivos da forma

$$\{1990 + 4l, 1990 + 4l + 1, 1990 + 4l + 2, 1990 + 4l + 3\}$$

com l inteiro e $0 \leq l \leq r$. Isto é,

$$X = \bigcup_{l=0}^{r} \{1990 + 4l, 1990 + 4l + 1, 1990 + 4l + 2, 1990 + 4l + 3\}$$

Para ter subconjuntos A e B de igual soma e disjuntos coloque os elementos da forma $1990+4l$ e $1990+4l+3$ em A e os elementos da forma $1990 + 4l + 1$ e $1990 + 4l + 2$ em B.

$$A = \bigcup_{l=0}^{r} \{1990 + 4l, 1990 + 4l + 3\}$$

$$B = \bigcup_{l=0}^{r} \{1990 + 4l + 1, 1990 + 4l + 2\}$$

Substituindo $k = 4r + 3$ em (4.2.2) encontramos

$$S(A) = S(B) = (r + 1) \cdot (3980 + 4r + 3)$$

- Agora estudaremos o caso mais desafiador (i) $k = 4r$. O conjunto X possui $4r + 1$ elementos, logo não pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos do mesmo tamanho. A primeira tentativa de partição chamaremos "gulosa": colocamos os $2r$ maiores elementos em A_g e os $2r + 1$ menores em B_g. Isto é,

$$A_g = \{1990 + 2r + 1, 1990 + 2r + 2, \cdots, 1990 + 4r\}$$

$$B_g = \{1990, 1990 + 1, \cdots, 1990 + 2r\}$$

Qualquer outra partição disjunta de X com o mesmo número de elementos em A e B e "não gulosa" terá soma menor dos elementos de A e soma maior dos elementos de B. Isto é, com $\mid A \mid = \mid A_g \mid$ e $\mid B \mid = \mid B_g \mid$, temos $S(A) \leq S(A_g)$ e $S(B) \geq S(B_g)$.

Os elementos em A_g e B_g, resultados da partição “gulosa”, formam progressões aritméticas de passo 1. Suas somas são

$$S(A_g) = (3980 + 6r + 1) \cdot r$$

$$S(B_g) = (1990 + r) \cdot (2r + 1)$$

Igualando as duas equações acima encontramos para r um valor que não é um número inteiro:$r \simeq 22,3$. Isto é, a primeira tentativa de partição de X não foi bem sucedida. Porém, podemos concluir que com este tipo de partição $S(A_g) < S(B_g)$ quando $r < 23$ e $S(A_g) > S(B_g)$ quando $r \geq 23$. Por exemplo, substituindo $r = 22$ encontramos $S(A_g) - S(B_g) = -54$ e substituindo $r = 23$ encontramos $S(A_g) - S(B_g) = 126$. Com isto concluimos que no caso $k = 4r$ e $r < 23$ não é possível particionar X para satisfazer que $S(A) = S(B)$, pois a partição “gulosa” era a melhor escolha. Porém, no caso $k = 4r$ e $r \geq 23$ uma partição “não gulosa” resolve o problema.

A segunda partição, “não gulosa”, é encontrada a partir da primeira, “gulosa”, e com a ajuda de recursos computacionais. No caso $k = 4r$ e $r = 23$ sejam

$$A^* = \{2035, 2036, \cdots, 2051\} \bigcup \{2053, 2054, \cdots, 2081\}$$

$$B^* = \{1990; 1991; \cdots; 2034\} \bigcup \{2052\} \bigcup \{2082\}$$

e vale que $S(A^*) = S(B^*)$. Substituindo $k = 92$ em (4.2.2) encontramos $S(A^*) = S(B^*) = 94674$. No caso $k = 4r$ e $r > 23$ use os conjuntos A^* e B^* como ponto de partida e continue a separação dos elementos de X para $k > 92$ como no caso (iv) $k = 4r + 3$. Resumindo, existe solução para o problema quando $k = 4r + 3$ com r inteiro positivo ou zero e quando $k = 4r$ e $r \geq 23$ com r inteiro positivo.

Capítulo 5

Geometria

5.1 Teorema de Ptolomeu. IMO 2000 SL-P4

5.1.1 Teorema de Ptolomeu

Um quadrilátero é dito inscritível quando seus quatro vértices pertecem a uma mesma circunferência.

Teorema de Ptolomeu: Em um quadrilátero inscritível $A_1A_2A_3A_4$ o produto das diagonais é igual a soma dos produtos dos lados opostos (figura 5.1) . Isto é, vale

$$A_1A_3 \cdot A_2A_4 = A_1A_4 \cdot A_2A_3 + A_1A_2 \cdot A_3A_4 \tag{5.1.1}$$

A forma inversa também é verdadeira. Se (5.1.1) valer, então $A_1A_2A_3A_4$ é um quadrilátero inscritível.

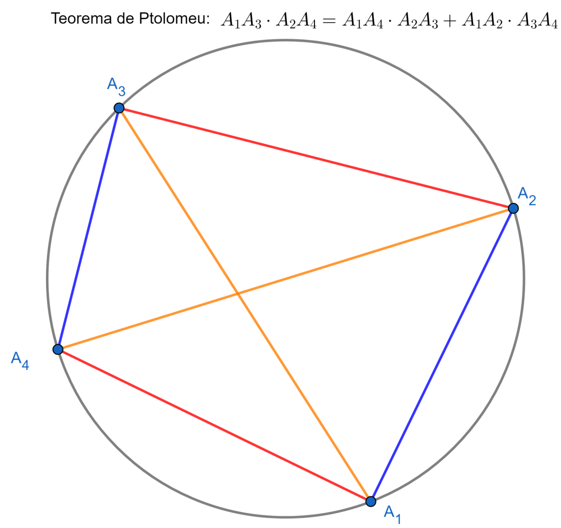

Figura 5.1: Enunciado do Teorema de Ptolomeu. Para um quadrilátero ser inscritível o produto dos comprimento das diagonais (em amarelo) deve ser igual a soma dos produtos dos lados opostos (azul e vermelho) e viceversa.

Demostração da forma direta do Teorema de Ptolomeu: Suponhamos que $A_1A_2A_3A_4$ é um quadrilátero inscritível. Com referência a corda A_1A_2 os ângulos $A_1A_4A_2 = A_1A_3A_2 = \alpha$ enchergam o mesmo arco de circunferência. Análogamente, focando na corda A_2A_3 os ângulos $A_2A_4A_3 = A_2A_1A_3 = \beta$ enchergam o mesmo arco de circunferência. Posicione um ponto D no interior do segmento A_1A_3 de tal forma que os ângulos $A_3A_2A_4 = A_1A_2D = \gamma$ sejam iguais. Veja figura 5.2.

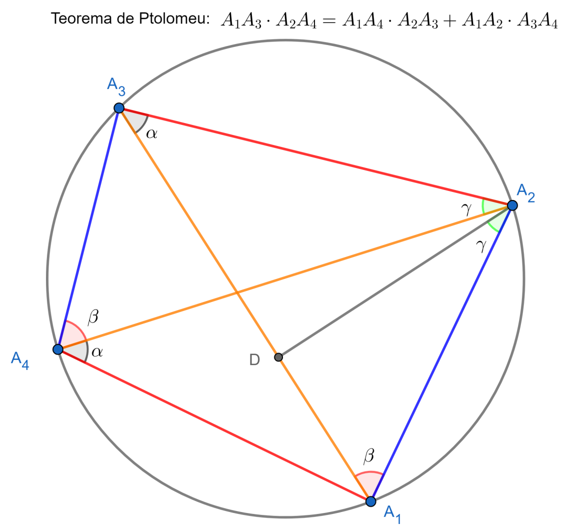

Figura 5.2: Demostração da forma direta do Teorema de Ptolomeu. Posicione um ponto D no interior do segmento A_1A_3 de tal forma que os ângulos $A_3A_2A_4 = A_1A_2D = \gamma$ sejam iguais.

Os triângulos A_1A_2D e $A_4A_2A_3$ são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo. Segue que

$$\frac{A_1A_2}{A_4A_2} = \frac{A_1D}{A_4A_3} = \frac{A_2D}{A_2A_3} \tag{5.1.2}$$

A figura 5.3 ajuda a entender a semelhança.

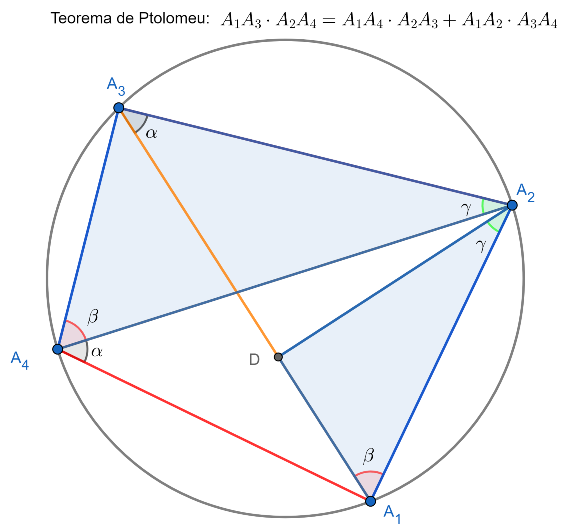

Figura 5.3: Os triângulos A_1A_2D e $A_4A_2A_3$ são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo.

Os triângulos A_3A_2D e $A_4A_2A_1$ são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo. Note que os ângulo $A_1A_2A_4 = A_3A_2D$ são iguais, pois o ângulo DA_2A_4 é uma parte comum. Segue que

$$\frac{A_3A_2}{A_4A_2} = \frac{A_3D}{A_4A_1} = \frac{A_2D}{A_2A_1} \tag{5.1.3}$$

A figura 5.4 ajuda a entender a semelhança.

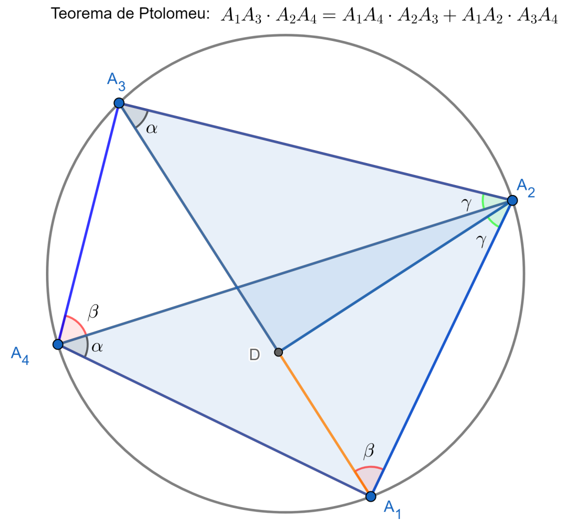

Figura 5.4: Os triângulos A_3A_2D e $A_4A_2A_1$ são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo.

Note de (5.1.2) que $A_1A_2 \cdot A_3A_4 = A_1D \cdot A_2A_4$ e de (5.1.3) temos $A_1A_4 \cdot A_2A_3 = A_3D \cdot A_2A_4$. Somando as duas equações anteriores

$$A_1A_4 \cdot A_2A_3 + A_1A_2 \cdot A_3A_4 = A_3D \cdot A_2A_4 + A_1D \cdot A_2A_4$$

$$A_1A_4 \cdot A_2A_3 + A_1A_2 \cdot A_3A_4 = (A_3D + A_1D) \cdot A_2A_4$$

Mas $A_3D + A_1D = A_1A_3$, como queriamos provar.

5.1.2 IMO 2000 SL-P4

Seja $A_1A_2...A_n$ um polígono convexo com $n \geq 4$. Prove que $A_1A_2...A_n$ é inscritível por uma circunferência se, e somente se, a cada vértice A_j pode ser associado um par de números reais (b_j, c_j), $j = 1, 2, ...n$, tal que

$$A_iA_j = b_jc_i - b_ic_j \tag{5.1.4}$$

para todo i, j com $1 \leq i < j \leq n$.

A IMO 2000 foi realizada na cidade Taejon, Coreia do Sul [20]. Problema proposto pela delegação da Russia [38].

Solução:

Primeiro, suponhamos que a cada vértice A_j pode ser associado um par de números reais (b_j, c_j), $j = 1, 2, ...n$, tal que $A_iA_j = b_jc_i - b_ic_j$ para todo i, j com $1 \leq i < j \leq n$.

Para provar que o polígono $A_1A_2...A_n$ é inscritível basta provar que os quadriláteros $A_1A_2A_3A_i$ com $4 \leq i \leq n$ são inscritíveis. Ou pela forma inversa do Teorema de Ptolomeu que

$$A_1A_3 \cdot A_2A_i = A_1A_i \cdot A_2A_3 + A_1A_2 \cdot A_3A_i \tag{5.1.5}$$

Note de (5.1.4) que

$$A_1A_3 = b_3c_1 - b_1c_3$$

$$A_2A_i = b_1c_2 - b_2c_i$$

$$A_1A_i = b_ic_1 - b_1c_i$$

$$A_2A_3 = b_3c_2 - b_2c_3$$

$$A_1A_2 = b_2c_1 - b_1c_2$$

$$A_3A_i = b_1c_3 - b_3c_i$$

Subtituindo-se as 6 equações anteriores em (5.1.5)

$$(b_3c_1 - b_1c_3) \cdot (b_1c_2 - b_2c_i) = (b_ic_1 - b_1c_i) \cdot (b_3c_2 - b_2c_3) + (b_2c_1 - b_1c_2) \cdot (b_1c_3 - b_3c_i)$$

verifica-se a igualdade.

Segundo, suponhamos que $A_1A_2...A_n$ é inscritível. Logo, os quadriláteros $A_1A_2A_iA_j$ com $3 \leq i < j \leq n$ são inscritíveis. Pela forma direta do Teorema de Ptolomeu vale que

$$A_1A_i \cdot A_2A_j = A_1A_j \cdot A_2A_i + A_1A_2 \cdot A_iA_j \tag{5.1.6}$$

Segue que

$$A_iA_j = \frac{A_1A_i}{A_1A_2} \cdot A_2A_j - \frac{A_1A_j}{A_1A_2} \cdot A_2A_i \tag{5.1.7}$$

Na equação anterior faça $c_i = \frac{A_1A_i}{A_1A_2}$ $\forall i$, $b_i = A_2A_i$ $\forall i \geq 2$ e $b_1 = -A_1A_2$.

$$A_iA_j = c_i \cdot b_j - c_j \cdot b_i \tag{5.1.8}$$

Isso conclue a prova do exercício para todo i, j com $1 \leq i < j \leq n$.

5.2 Distância entre Pontos na Semicircunferência Trigonométrica. SL da IMO 1975 P15

5.2.1 Distância entre Pontos na Semicircunferência Trigonométrica

A figura 5.5 mostra os pontos A_i e A_j em uma semicircunferência de raio 1 e centrada em $O = (0, 0)$. O segmento BA_1 representa a horizontal. Sejam os ângulos $\angle A_iOA_1 = \alpha_i$ e $\angle A_jOA_1 = \alpha_j$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\alpha_j > \alpha_i$.

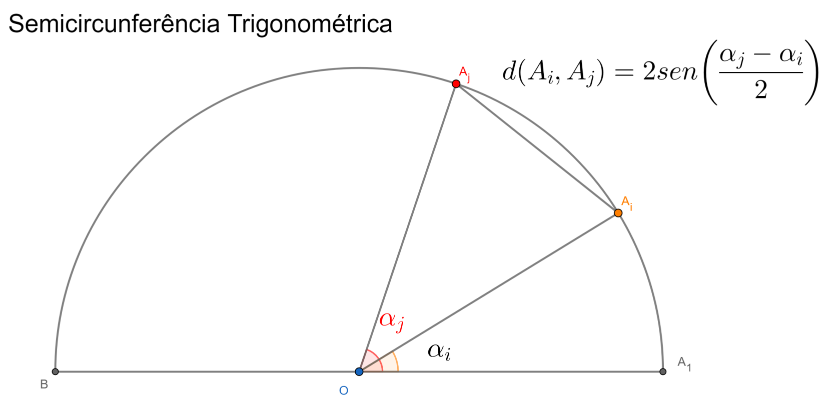

Figura 5.5: Distância entre dois pontos medida por uma corda na semicircunferência trigonométrica (raio 1).

Proposição: A distância entre os os pontos A_i e A_j pode ser calculada como

$$d\left(A_i, A_j\right) = 2sen\left(\frac{\alpha_j - \alpha_i}{2}\right) \tag{5.2.1}$$

Demonstração: As coordenadas dos pontos em um sistema cartesiano são $A_i = \left(cos\left(\alpha_i\right), sen\left(\alpha_i\right)\right)$ e $A_j = \left(cos\left(\alpha_j\right), sen\left(\alpha_j\right)\right)$. Logo a distância será

$$d\left(A_i, A_j\right) = \sqrt{\left[cos\left(\alpha_j\right) - cos\left(\alpha_i\right)\right]^2 + \left[sen\left(\alpha_j\right) - sen\left(\alpha_i\right)\right]^2}$$

Desenvolvendo os quadrados e usando a identidade trigonométrica fundamental ($cos^2(x)+sen^2(x) = 1$) encontramos

$$d\left(A_i, A_j\right) = \sqrt{2}\sqrt{1 - cos\left(\alpha_j\right) cos\left(\alpha_i\right) - sen\left(\alpha_j\right) sen\left(\alpha_i\right)} \tag{5.2.2}$$

No próximo passo usaremos as identidades trigonométricas da mudança de um produto de cossenos e senos em somas:

$$cos\,(x)\,cos\,(y) = \frac{cos\,(x-y) + cos\,(x+y)}{2} \tag{5.2.3}$$

$$sen\,(x)\,sen\,(y) = \frac{cos\,(x-y) - cos\,(x+y)}{2} \tag{5.2.4}$$

Segue que (5.2.2) se transforma em

$$d\,(A_i, A_j) = \sqrt{2}\sqrt{1 - cos\,(\alpha_j - \alpha_i)} \tag{5.2.5}$$

A partir da identidade do cosseno do ângulo duplo, $cos\,(2x) = cos^2(x) - sen^2\,(x)$, encontramos que $cos\,(2x) = 2cos^2(x) - 1$ e $cos\,(x) = 2cos^2(\frac{x}{2}) - 1$.

Trocando x por $\alpha_j - \alpha_i$ na última igualdade encontramos

$$d\,(A_i, A_j) = \sqrt{2}\sqrt{2 - 2cos^2\left(\frac{\alpha_j - \alpha_i}{2}\right)}$$

Usando mais uma vez a identidade trigonométrica fundamental

$$d\,(A_i, A_j) = 2\sqrt{sen^2\left(\frac{\alpha_j - \alpha_i}{2}\right)} = 2 \mid sen\left(\frac{\alpha_j - \alpha_i}{2}\right) \mid$$

Como $0 < \frac{\alpha_j - \alpha_i}{2} \leq 90°$ temos que $sen\left(\frac{\alpha_j - \alpha_i}{2}\right) \geq 0$ e $d\,(A_i, A_j) = 2sen\left(\frac{\alpha_j - \alpha_i}{2}\right)\square$

5.2.2 SL da IMO 1975 P15

É possível colocar 1975 pontos em uma circunferência de raio 1 de tal forma que as distâncias entre qualquer par de pontos (medida pela corda que os conecta) é um número racional?

A IMO 1975 foi realizada na cidade de Burgas, Bulgaria [20]. O problema acima foi proposto pela delegação da antiga União Soviética [38].

Solução:

Assuma que o centro da circunferência está no ponto $O = (0, 0)$ e que os pontos $A_1, A_2, ..., A_{1975}$ são colocados na semicircunferência superior. Denote os ângulos por

$\angle A_i O A_1 = \alpha_i$ com $1 \leq i \leq 1975$, $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_i < \alpha_j$ para todo $i < j$.

De (5.2.1) a distância A_iA_j é igual a $d\,(A_i, A_j) = 2sen\left(\frac{\alpha_j - \alpha_i}{2}\right)$. Usando a identidade para o seno da diferênça $sen(x-y) = sen\,(x)\,cos\,(y) - sen\,(y)\,cos\,(x)$ podemos escrever

$$d\,(A_i, A_j) = 2sen\left(\frac{\alpha_j}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) - 2sen\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha_j}{2}\right) \tag{5.2.6}$$

A distância será um número racional se $sen\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)$ e $cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)$ são racionais para todo $1 \leq i \leq 1975$.

Note agora que é possível introduzir uma mudança de variáveis: dado $t \in \mathbb{Q}$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que sejam válidas simultâneamente as equações a seguir

$$sen(x) = \frac{2t}{t^2+1}$$

$$cos(x) = \frac{t^2-1}{t^2+1}$$

pois $-1 \leq \frac{2t}{t^2+1} \leq 1$ e $-1 \leq \frac{t^2-1}{t^2+1} \leq 1$. Adicionalmente

$$\left(\frac{2t}{t^2+1}\right)^2 + \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2 = 1$$

Logo, existe um número infinito de valores de t racionais, e tão pequenos quanto se queira, para os quais $sen\,(x)$ e $cos\,(x)$ são números racionais e por (5.2.6) a distância entre os pontos A_i e A_j será um número racional.

Um gráfico iterativo em Geogebra das funções que aparecem nesta seção pode ser visto em [39].

Referências Bibliográficas

[1] Turner, Nura D. A Historical Sketch of Olympiads: U.S.A. and International The College Mathematics Journal, Vol. 16, No. 5 (Nov., 1985), pp. 330-335

[2] Wikipedia: "International Mathematical Olympiad", https://en.wikipedia.org/wiki/International_Mathematical_Olympiad. Acesso em 08/04/2019.

[3] SUCUPIRA, Gicele. Será que as meninas e mulheres não gostam de matemática? Reflexões sobre gênero, educação e ciência a partir de uma etnografia sobre as Olimpíadas de Matemática em Santa Catarina. Fazendo Gênero, v. 8 - Corpo, Violência e Poder. Florianópolis: UFSC, 2008. Disponível em http://www1.fisica.org.br/gt-genero/images/arquivos/Apresentacoes_e_Textos/sucupira.pdf. Acesso em 08/04/2019.

[4] Procedure to be followed by a new country wishing to take part in the International Mathematical Olympiad http://www.imo-official.org/documents/InvitationIMO.pdf. Acesso em 08/04/2019.

[5] Regulamento Completo das IMOs. http://www.imo-official.org/documents/RegulationsIMO.pdf. Acesso em 08/04/2019.

[6] Regulamento Adicional do Ano 2019 em http://www.imo-official.org/documents/AnnualRegulationsIMO.pdf. Acesso em 08/04/2019.

[7] Resultados cumulativos por equipes nas IMOs, http://www.imo-official.org/results_country.aspx. Acesso em 08/04/2019.

[8] Resultados por equipe e individual de Cuba nas IMOs, http://www.imo-official.org/country_hall.aspx?code=CUB&column=year&order=desc. Acesso em 08/04/2019.

[9] Resultados por equipe e individual do Brasil nas IMOs,
http://www.imo-official.org/country_team_r.aspx?code=BRA&column=name&order=desc.
Acesso em 08/04/2019.

[10] Página do Prof. Carlos Gustavo Moreira, Ganhador de Ouro na IMO de 1990
https://impa.br/page-pessoas/carlos-gustavo-t-de-a-moreira/. Acesso em 08/04/2019.

[11] Página do Prof. Artur Avila Cordeiro de Melo, Ganhador de Ouro na IMO de 1995
https://pt.wikipedia.org/wiki/Artur_Avila. Acesso em 08/04/2019.

[12] Sitio oficial da Medalha Fields
https://www.mathunion.org/imu-awards/fields-medal. Acesso em 08/04/2019.

[13] Participação do Brasil em Olimpíadas Internacionais de Matemática,
https://www.obm.org.br/competicoes/internacionais/. Acesso em 08/04/2019.

[14] Seleção de estudantes para participar das Olimpíadas Internacionais de Matemática representando ao Brasil
https://www.obm.org.br/competicoes/treinamentos-para-competicoes/. Acesso em 08/04/2019.

[15] Programa da GloboNews sobre índices de educação no Brasil. A reportagem local começa em 15min23s e a FZEA-USP é citada em 19min35s.
http://g1.globo.com/globo-news/jornal-globo-news/videos/t/videos/v/mec-divulga-sistema-de-avaliacao-da-educacao-basica-2017/6984727/. Acesso em 08/04/2019.

[16] Página do POTI (Pólo Olímpico de Treinamento Intensivo)
http://poti.impa.br/index.php/site/polos. Acesso em 08/04/2019.

[17] Conjunto de vídeo-aulas com a resolução de problemas de Olimpíadas de Matemática
https://www.youtube.com/playlist?list=PL8v7luSb9qi77-eVD5wmPZa6dcmLMovbx. Acesso em 08/04/2019.

[18] Antonio Caminha Muniz Neto, Revista Eureka! N. 5, 1999, página 35,
https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka5.pdf. Acesso em 08/04/2019.

[19] Ilustração com vetores tridimensionais da Desigualdade do Rearranjo,
https://www.geogebra.org/3d/ef43vxtk. Acesso em 08/04/2019.

[20] Sitio oficial das Olimpíadas Internacionais de Matemática,
http://www.imo-official.org/problems.aspx. Acesso em 08/04/2019.

[21] Forum com soluções, em inglês, do IMO-2018-Problema-2, https://artofproblemsolving.com/community/q1h1670581p10626524. Acesso em 08/04/2019.

[22] Forum com soluções, em inglês, do IMO-2018-Problema-3, https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_IMO_Problems/Problem_3. Acesso em 08/04/2019.

[23] Chang, Hu, Lih e Shieh: "Exact Difference Triangles," Bulletin of the Institute of Mathematics, Academia Sinica, Volume 5, 1977, pp 191- 197, http://w3.math.sinica.edu.tw/bulletin/bulletin_old/d51/5120.pdf. Acesso em 08/04/2019.

[24] Forum com soluções, em inglês, do IMO-2017-Problema-1, https://artofproblemsolving.com/community/q1h1480154p8633268. Acesso em 08/04/2019.

[25] Forum com soluções, em inglês, do IMO-2018-Problema-5, https://artofproblemsolving.com/community/c6h1671291p10632353. Acesso em 08/04/2019.

[26] Shortlist de Problemas com Soluções da IMO 2017, http://www.imo-official.org/problems/IMO2017SL.pdf. Acesso em 08/04/2019.

[27] Shortlist de Problemas com Soluções da IMO 2014, http://www.imo-official.org/problems/IMO2014SL.pdf. Acesso em 08/04/2019.

[28] Forum com soluções, em inglês, do IMO-2014-Problema-1, https://artofproblemsolving.com/community/q1h596930p3542095. Acesso em 08/04/2019.

[29] A. C. Morgado e P. C. P. Carvalho, Matemática Discreta, Coleção ProfMat, SBM, 2da Edição, 2015

[30] Conjunto de Vídeo-Aulas do Prof. Fabio Henrique Teixeira de Souza iniciando em https://www.youtube.com/watch?v=da1prIpZniQ&index=6. Acesso em 08/04/2019.

[31] Shortlist de Problemas com Soluções da IMO 2012 http://www.imo-official.org/problems/IMO2012SL.pdf. Acesso em 08/04/2019.

[32] Shortlist de Problemas com Soluções da IMO 2011 http://www.imo-official.org/problems/IMO2011SL.pdf. Acesso em 08/04/2019.

[33] Shortlist de Problemas com Soluções da IMO 2009 http://www.imo-official.org/problems/IMO2009SL.pdf. Acesso em 08/04/2019.

[34] Shortlist de Problemas com Soluções da IMO 2007
http://www.imo-official.org/problems/IMO2007SL.pdf. Acesso em 08/04/2019.

[35] Shortlist de Problemas com Soluções da IMO 2006
http://www.imo-official.org/problems/IMO2006SL.pdf. Acesso em 08/04/2019.

[36] Shortlist de Problemas com Soluções da IMO 2005
https://www.imomath.com/imocomp/sl05_0707.pdf. Acesso em 08/04/2019.

[37] Shortlist de Problemas com Soluções da IMO 2002
https://anhngq.files.wordpress.com/2010/07/imo-2002-shortlist.pdf. Acesso em 08/04/2019.

[38] DJUKIC D. et al., The IMO Compendium - A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2004, Springer, 2006.
http://web.cs.elte.hu/∼nagyzoli/compendium.pdf. Acesso em 08/04/2019.

[39] Gráfico iterativo em Geogebra das funções da Seção “Distâncias na Semicircunferência Trigonométrica”
https://www.geogebra.org/m/nwy2phv9#material/hxxppbne. Acesso em 08/04/2019.